



中华人民共和国国家计量技术规范

JJF 1059.2—2012

用蒙特卡洛法评定测量不确定度

Monte Carlo Method for Evaluation of Measurement Uncertainty

2012-12-21 发布

2013-06-21 实施

国家质量监督检验检疫总局 发布

用蒙特卡洛法评定测量不确定度

Monte Carlo Method for Evaluation
of Measurement Uncertainty

JJF 1059.2—2012

归口单位：全国法制计量管理计量技术委员会

起草单位：北京理工大学

中国计量科学研究院

国家质检总局计量司

江苏省计量科学研究院

本规范起草人：

周桃庚 北京理工大学

叶德培

沙定国 北京理工大学

原遵东 中国计量科学研究院

施昌彦

陈 红 国家质检总局计量司

赵 峰 江苏省计量科学研究院

目 录

引言	(II)
1 适用范围	(1)
2 引用文件	(1)
3 术语和定义	(2)
4 蒙特卡洛法	(5)
4.1 蒙特卡洛法的实施步骤	(5)
4.2 模型的建立	(6)
4.3 蒙特卡洛试验次数	(6)
4.4 输入量概率分布的抽样及模型值计算	(6)
4.5 输出量分布函数的离散表示	(7)
4.6 输出量及其标准不确定度	(7)
4.7 输出量的包含区间	(7)
4.8 自适应蒙特卡洛方法	(8)
5 报告结果	(9)
6 用蒙特卡洛法验证 GUM 法的结果	(10)
6.1 用蒙特卡洛法验证 GUM 法的结果	(10)
6.2 用于验证 GUM 法的蒙特卡洛试验次数	(11)
附录 A 常见的输入量概率密度函数	(12)
附录 B 用蒙特卡洛法传播概率分布实例	(16)
附录 C MCM 与 GUM 法的比较	(31)
附录 D 分布传播的基本原理	(32)
附录 E 基本符号	(33)
附录 F 常用术语的英汉对照	(36)

引 言

本规范规定了用蒙特卡洛法 (Monte Carlo Method, 简称 MCM) 评定与表示测量不确定度的方法, 其核心内容是在建立测量模型的基础上采用 MCM 进行概率分布传播。本规范适用于具有多个输入量和单一输出量的测量模型。

本规范是 JJF 1059.1—2012《测量不确定度评定与表示》的补充件, 等同采用国际标准 ISO/IEC GUIDE 98-3: 2008 (GUM) 的附件 1:《用蒙特卡洛法传播概率分布》(Supplement 1: Propagation of distributions using a Monte Carlo method), 但在结构编排上作了较大改动。

本规范描述的 MCM 尤其适用于以下三种情况:

- 测量模型明显呈非线性;
- 输入量的概率密度函数 (probability density function, 简称 PDF) 明显非对称;
- 输出量的 PDF 较大程度地偏离正态分布或 t 分布, 尤其分布明显非对称的场合。

在上述情况下, 按 JJF 1059.1 确定的输出量估计值及其标准不确定度可能变得不可靠, 或可能会导致对包含区间或扩展不确定度的估计不切实际。

在 JJF 1059.1 中, 输入量的信息是最佳估计值、标准不确定度、自由度和协方差。在本规范中, 输入量的信息是输入量的 PDF。

在 JJF 1059.1 中, 是通过不确定度传播律确定输出量的合成标准不确定度。在本规范中, 采用 MCM 进行概率分布传播确定被测量的估计值及其包含区间。

本规范的附录 A“常见的输入量概率密度函数”、附录 B“用蒙特卡洛法传播概率分布实例”、附录 C“MCM 与 GUM 法的比较”和附录 D“分布传播的基本原理”是本规范内容的补充, 所用的基本符号, 取自 GUM 及有关的 ISO、IEC 标准。附录 E“基本符号”和附录 F“常用术语的英汉对照”分别为参考文件。

本规范为首次发布。

用蒙特卡洛法评定测量不确定度

1 适用范围

1.1 本规范为测量不确定度评定提供了一个通用的数值方法，适用于具有任意多个可由概率密度函数（PDF）表征的输入量和单一输出量的模型。

1.2 本规范主要涉及有明确定义的，并可用唯一值表征的被测量估计值的不确定度。

1.3 本规范为输出量 PDF 提供一个表示方法。由于一般不能确定输出量的 PDF 的解析表达式，故本方法是在规定的数值容差下估计出 PDF 的三个主要特征量：

1) 输出量的估计值；

2) 该估计值的标准不确定度；

3) 约定包含概率的输出量包含区间（包括任意包含概率，以及概率对称包含区间和最短包含区间）。

1.4 本规范特别适用于评定以下典型情况的测量不确定度问题：

a) 各不确定度分量的大小不相近；

b) 应用不确定度传播律时，计算模型的偏导数困难或不方便；

c) 输出量的 PDF 较大程度地背离正态分布、 t 分布；

d) 输出量的估计值和其标准不确定度的大小相当；

e) 测量模型明显呈非线性；

f) 输入量的 PDF 明显非对称。

1.5 本规范提供了检查 GUM 法是否适用的验证方法。GUM 法若明显适用，则依然是不确定度评定的主要方法。

注：

1 本规范未考虑定义输出量不唯一的模型的情形。例如，没有指定二次方程取哪个解。

2 本规范未考虑获得输出量先验 PDF 的情形，但本规范采用的方法作适当的改动后可处理这种情形。

2 引用文件

JJF 1059.1—2012 测量不确定度评定与表示

GB/T 3358.1—2009 统计学词汇及符号 第 1 部分：一般统计术语与用于概率的术语

GB/T 8170—2008 数值修约规则与极限数值的表示和判定

ISO/IEC GUIDE 98-3: 2008 测量不确定度 第 3 部分：测量不确定度表示指南 (GUM: 1995)(Uncertainty of measurement—Part 3: Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM: 1995))

ISO/IEC GUIDE 98-3/Suppl. 1: 2008 测量不确定度 第 3 部分 测量不确定度表示指南 (GUM: 1995) 附件 1：用蒙特卡洛方法传播概率分布 (Uncertainty of

measurement—Part 3: Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM; 1995) Supplement 1: Propagation of distributions using a Monte Carlo method)

ISO 3534-1: 2006 统计学 术语和符号 第1部分: 一般统计术语和概率术语 (Statistics—Vocabulary and symbols—Part 1: General statistical terms and terms used in probability)

ISO/IEC GUIDE 99: 2007 国际计量学词汇——基本通用的概念和相关术语 (VIM) (International vocabulary of metrology—Basic and general concepts and associated terms (VIM))

凡是注日期的引用文件, 仅注日期的版本适用于本规范; 凡是不注日期的引用文件, 其最新版本 (包括所有的修改单) 适用本规范。

3 术语和定义

本规范主要采用 ISO/IEC GUIDE 98-3: 2008 的附件 1 中的术语和定义。根据本规范的特点, 其中有些术语与 JJF 1001—2011《通用计量术语及定义》、JJF 1059.1—2012《测量不确定度评定与表示》的相关定义有所不同。

3.1 概率分布 probability distribution

给出一个随机变量取任意给定值或取值于某给定集合的概率的 (随机变量) 函数。

注:

- 1 随机变量在整个集合中取值的概率等于 1。
- 2 一个概率分布与单一 (标量) 随机变量有关时称为单变量概率分布, 与随机变量的向量有关时称为多变量概率分布。多变量概率分布也称联合分布。
- 3 一个概率分布可以采用分布函数或概率密度函数的形式。

3.2 分布函数 distribution function

对于每个 ξ 值, 给出了随机变量 X 小于或等于 ξ 的概率的一个函数, 用式 (1) 表示:

$$G_X(\xi) = \Pr(X \leq \xi) \quad (1)$$

3.3 概率密度函数 probability density function, PDF

分布函数的导数, 若导数存在, 则

$$g_X(\xi) = dG_X(\xi)/d\xi \quad (2)$$

3.4 正态分布 normal distribution

连续随机变量 X 的概率分布, 其 PDF 为

$$g_X(\xi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi-\mu}{\sigma}\right)^2\right], \quad -\infty < \xi < \infty \quad (3)$$

式中:

μ —— X 的期望;

σ ——标准偏差。

注: 正态分布也称作高斯分布。

3.5 t 分布 t distribution

连续随机变量 X 的概率分布, 其 PDF 为

$$g_X(\xi) = \frac{\Gamma[(\nu+1)/2]}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma(\nu/2)} \left(1 + \frac{\xi^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2} \quad (4)$$

式中: $-\infty < \xi < \infty$, ν 表示分布的自由度, 为正整数, 伽马函数如式 (5)

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z > 0 \quad (5)$$

3.6 期望 expectation

随机变量的性质, 对于 PDF 为 $g_X(\xi)$ 的连续随机变量 X , 由式 (6) 给出

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi g_X(\xi) d\xi \quad (6)$$

3.7 方差 variance

随机变量的性质, 对于 PDF 为 $g_X(\xi)$ 的连续随机变量 X , 由式 (7) 给出

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - E(X))^2 g_X(\xi) d\xi \quad (7)$$

3.8 标准偏差 standard deviation

方差的正平方根 $\sqrt{V(x)}$ 。

3.9 r 阶矩 moment of order r

连续随机变量 X 的 r 次幂的期望, 即

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^r g_X(\xi) d\xi \quad (8)$$

注:

- 1 r 阶中心矩为随机变量 $Z = [X - E(x)]^r$ 的期望。
- 2 期望 $E(X)$ 是一阶矩, 方差 $V(X)$ 是二阶中心矩。

3.10 协方差 covariance

两个随机变量相互依赖性的度量, 对于联合 (多变量) PDF 为 $g_X(\xi)$ 的两个连续随机变量 X_1 和 X_2 , 由式 (9) 给出

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\xi_1 - E(X_1)][\xi_2 - E(X_2)] g_X(\xi) d\xi_1 d\xi_2 \quad (9)$$

式中, $X = (X_1, X_2)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ 。

注: 在 JJF 1059.1 中, 协方差的定义为: 协方差是两个随机变量相互依赖性的度量, 它是两个随机变量各自的误差之积的期望。用符号 $\text{COV}(X, Y)$ 或 $V(X, Y)$ 表示

$$V(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \quad (10)$$

3.11 不确定度矩阵 uncertainty matrix

$N \times N$ 维矩阵, 其对角线上的元素为 N 维向量中分量的估计值的标准不确定度的平方, 其他非对角线上的元素为两个估计值之间的协方差。

注:

- 1 向量 X 的估计值 x 的 $N \times N$ 维不确定度矩阵 U_x 的表达式为

$$U_x = \begin{bmatrix} u(x_1, x_1) & \cdots & u(x_1, x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u(x_N, x_1) & \cdots & u(x_N, x_N) \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中, $u(x_i, x_i) = u^2(x_i)$ 为 x_i 的方差 (标准不确定度的平方), $u(x_i, x_j)$ 为 x_i 和 x_j 之间的协方差, 若 X 的分量 X_i 和 X_j 不相关, 则 $u(x_i, x_j) = 0$ 。

2 协方差又称作相互不确定度。

3 不确定度矩阵又称作协方差矩阵或方差—协方差矩阵。

3.12 包含区间 coverage interval

基于可获信息确定的包含某量的值的区间, 量值以一定概率落在该区间内。

注:

1 包含区间有时被称为可信区间或贝叶斯区间。

2 一般情况下, 对于一个给出的概率, 存在多于一个的包含区间。

3 不应把包含区间称为“置信区间”, 以避免与统计学概念混淆。

4 在 JJF 1059.1 中, 包含区间定义为“基于可获信息确定的包含被测量一组值的区间, 被测量值以一定概率落在该区间内”。

3.13 包含概率 coverage probability

在规定的包含区间内包含某量的值的概率。

注:

1 为避免与统计学概念混淆, 不应把包含概率称为置信水平。

2 包含概率替代了曾经使用过的置信水准。

3 在 JJF 1059.1 中, 包含概率定义为“在规定的包含区间内包含被测量的一组值的概率”。

3.14 包含区间长度 length of a coverage interval

在包含区间内, 最大值减去最小值。

3.15 概率对称包含区间 probabilistically symmetric coverage interval

某个量的包含区间, 其中该量小于区间内最小值的概率等于该量大于区间内最大值的概率。

3.16 最短包含区间 shortest coverage interval

在具有相同包含概率的一个量的所有包含区间中, 长度为最短。

3.17 分布传播 propagation of distributions

应用与输出量相关的输入量的概率分布确定输出量的概率分布的方法。

注: 此方法可以是解析的或数值的, 确切的或近似的。

3.18 GUM 测量不确定度评定方法 GUM method

简称 GUM 法

一种应用测量不确定度传播律的方法。为提供输出量的包含区间, 该方法将输出量近似为正态分布或缩放位移 t 分布。该方法是国际组织 ISO/IEC 在 GUIDE 98-3: 2008 《测量不确定度表示 第 3 部分 测量不确定度表示指南》中推荐采用的。

3.19 蒙特卡洛法 Monte Carlo method

简称 MCM

利用对概率分布进行随机抽样而进行分布传播的方法。

3.20 数值容差 numerical tolerance

最短区间的半宽度, 该区间包含能正确表达达到指定位数的有效十进制数的所有数。

例：大于 1.75 且小于 1.85 的所有数可以表达为两位有效十进制数 1.8 的数值容差就是 $(1.85 - 1.75) / 2 = 0.05$ 。

3.21 独立 independence

两个随机变量的联合概率分布是它们每个概率分布的乘积。

注：如果两个随机变量是独立的，那么它们的协方差和相关系数等于零，但反之不一定成立。

3.22 测量模型 measurement model

简称模型 model

测量中涉及的所有已知量间的数学关系。

注：

- 1 测量模型的通用形式是方程： $h(Y, X_1, X_2, \dots, X_N) = 0$ ，其中测量模型中的输出量 Y 是被测量，其量值由测量模型中输入量 X_1, X_2, \dots, X_N 的有关信息推导得到。
- 2 在有两个或多个输出量的较复杂情况下，测量模型包含一个以上的方程。
- 3 在测量模型中，输入量与输出量间的函数关系又称测量函数。

4 蒙特卡洛法

MCM 是实现概率分布传播的一种数值方法。它通过对输入量 X_i 的 PDF 离散抽样，由测量模型传播输入量的分布，计算获得输出量 Y 的 PDF 的离散抽样值，进而由输出量的离散分布数值直接获取输出量的最佳估计值、标准不确定度和包含区间。该输出量的最佳估计值、标准不确定度和包含区间等特性的可信程度随 PDF 抽样数增加可得到改善。

图 1 描述的是，由输入量 X_i ($i=1, 2, \dots, N$) 的 PDF，通过模型传播，给出输出量 Y 的 PDF 的一个过程示意。图 1 中，列出了分别为相互独立的正态分布、三角分布和正态分布的三个输入量，而输出量的 PDF 显示为分布不对称的情形。

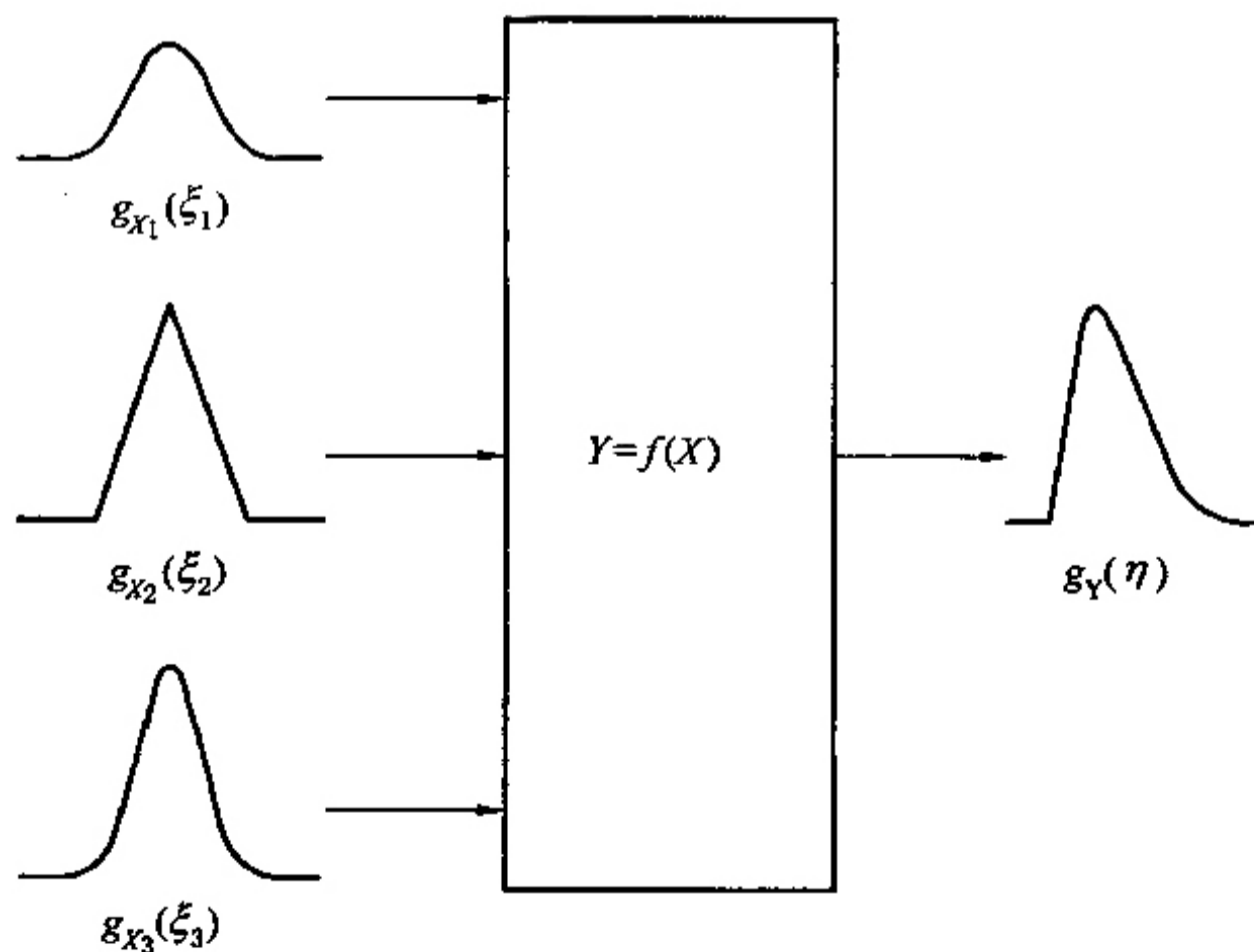


图 1 输入量独立时分布传播的描述

4.1 蒙特卡洛法的实施步骤

MCM 是通过如下步骤实现概率分布的传播和不确定度的评定。

a) MCM 输入

- 1) 定义输出量 Y , 即需测量的量 (被测量);
- 2) 确定与 Y 相关的输入量 X_1, X_2, \dots, X_N ;
- 3) 建立 Y 和 X_1, X_2, \dots, X_N 之间的模型 $Y=f(X_1, X_2, \dots, X_N)$;
- 4) 利用可获信息, 为 X_i 设定 PDF, 如正态分布、矩形 (均匀) 分布等;
- 5) 选择蒙特卡洛试验样本量的大小 M 。

b) MCM 传播

1) 从输入量 X_i 的 PDF $g_{X_i}(\xi_i)$ 中抽取 M 个样本值 $x_{i,r}, i=1, 2, \dots, N, r=1, 2, \dots, M$;

2) 对每个样本向量 $(x_{1,r}, x_{2,r}, \dots, x_{N,r})$ 计算相应 Y 的模型值

$$y_r = f(x_{1,r}, x_{2,r}, \dots, x_{N,r}), \quad r=1, 2, \dots, M \quad (12)$$

c) MCM 输出

将这些 M 个模型值按严格递增次序排序, 通过这些排序的模型值而得到输出量 Y 的分布函数 $G_Y(\eta)$ 的离散表示 G 。

d) 报告结果

- 1) 由 G 计算 Y 的估计值 y 及 y 的标准不确定度 $u(y)$;
- 2) 由 G 计算在给定包含概率 p 时的 Y 的包含区间 $[y_{\text{low}}, y_{\text{high}}]$ 。

4.2 模型的建立

当被测量 Y (即输出量) 由 N 个其他量 X_1, X_2, \dots, X_N (即输入量), 通过函数关系 f 来确定时, 则

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N) \quad (13)$$

称为测量模型。式中大写字母表示量的符号, f 为测量函数。

如果输入量 X_i 的估计值为 x_i , 被测量 Y 的估计值为 y , 则测量模型可写为

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (14)$$

4.3 蒙特卡洛试验次数

4.3.1 需合理选择蒙特卡洛试验次数即样本量的大小 M , 也就是测量模型计算的次数。在规定的数值容差下, MCM 所提供的结果所需的试验次数跟输出量的 PDF “形状” 及包含概率有关。

注: $M=10^6$ 通常会为输出量提供 95% 包含区间, 该包含区间长度被修约为 1 位或 2 位有效十进制数字。

4.3.2 M 取值应远大于 $1/(1-p)$ 。例如, M 至少应大于 $1/(1-p)$ 的 10^4 倍。

4.3.3 由于无法保证这个数是否足够, 因此可使用自适应蒙特卡洛方法选择 M , 即试验次数不断增加的方法 (见 4.8)。

4.4 输入量概率分布的抽样及模型值计算

4.4.1 X_i 独立时, 可根据一系列测量值的分析, 或根据某些历史数据、校准数据和专家经验之类的信息所得到的科学判断, 为各 X_i 设定 PDF $g_{X_i}(\xi_i)$, 参见附录 A。

4.4.2 在 MCM 的实现过程中, 从 N 个输入量 X_i 的 PDF $g_{X_i}(\xi_i)$ 中抽取 M 个样本值 $x_{i,r}, i=1, 2, \dots, N, r=1, 2, \dots, M$ 。

注：概率分布的抽样方法可参见 ISO/IEC GUIDE 98-3: 2008 的附件 1 的附录 C 《抽样的概率分布》(Sampling from probability distributions)。

4.4.3 计算模型在每个样本 $(x_{1,r}, x_{2,r}, \dots, x_{N,r})$ 处的值

$$y_r = f(x_{1,r}, x_{2,r}, \dots, x_{N,r}), r=1, 2, \dots, M \quad (15)$$

4.5 输出量分布函数的离散表示

4.5.1 可采用如下步骤获得输出量 Y 的分布函数 $G_Y(\eta)$ 的离散表示 G ：

a) 将 MCM 得到的模型值 $y_r (r=1, 2, \dots, M)$ 按非递减次序排序。排序后的模型值记为 $y_{(r)} (r=1, 2, \dots, M)$ 。

b) 如有必要，对所有重复的模型值 $y_{(r)}$ 进行微小的数值扰动，使得 $y_{(r)} (r=1, 2, \dots, M)$ 的集合构成严格的递增序列。

c) 将 G 设为集合 $y_{(r)} (r=1, 2, \dots, M)$ 。

注：

- 1 关于步骤 a)，应采用数值运算次数正比于 $M \ln M$ 的排序算法。低效算法的运算时间正比于 M^2 ，使得运算时间过长。
- 2 步骤 a) 中，使用术语“非递减”，而不是“递增”，是因为模型值 y_r 有可能相等。
- 3 关于步骤 b)，只能用微小的数值扰动才可使 $y_{(r)}$ 的统计特性不变。
- 4 从 G 能得到期望和标准偏差的补充信息，如峰态系数和偏态系数以及其他统计量，如众数和中位数。

4.5.2 将 $y_{(r)}$ (或 y_r) 以适宜的子区间间隔绘制成直方图，得到频率分布。归一化处理使得面积为单位 1，则此频率分布提供了 Y 的 PDF $g_Y(\eta)$ 的一个近似。直方图的分辨力取决于选用的子区间间距，所以一般不根据直方图而是根据 G 来进行各种计算。直方图有助于理解 PDF 的本质，如非对称性的程度。

4.6 输出量及其标准不确定度

平均值

$$\tilde{y} = \frac{1}{M} \sum_{r=1}^M y_r \quad (16)$$

和由

$$u^2(\tilde{y}) = \frac{1}{M-1} \sum_{r=1}^M (y_r - \tilde{y})^2 \quad (17)$$

确定的标准偏差 $u(\tilde{y})$ ，分别为 Y 的估计值 y 和 y 的标准不确定度 $u(y)$ 。

注：

- 1 在一些特殊情况下，如其中一个输入量服从自由度小于 3 的 t 分布时，PDF 为 $g_Y(\eta)$ 的 Y 的期望和标准偏差可能不存在。式 (16)、式 (17) 计算出的结果可能没有意义。但是，由于 G 是有意义的且能确定，因此仍可得 Y 的包含区间。
- 2 一般 \tilde{y} 不等于模型在输入量的最佳估计处的值，这是因为，对于非线性模型 $f(X)$ ， $E(Y) = E[f(X)] \neq f[E(X)]$ 。无论 f 线性或者非线性， M 趋近于无穷大时，如果 $E[f(X)]$ 存在，则 \tilde{y} 的值近似等于 $E[f(X)]$ 。

4.7 输出量的包含区间

4.7.1 可由分布函数 $G_Y(\eta)$ 的离散表示 G 来确定 Y 的包含区间。

4.7.2 如果 pM 为整数, 设 $q = pM$, 否则取 q 为 $pM + 1/2$ 的整数部分。则 $[y_{\text{low}}, y_{\text{high}}]$ 为 Y 的概率 p 的包含区间, 其中, 对任意的 $r=1, 2, \dots, M-q$, $y_{\text{low}} = y_{(r)}$, $y_{\text{high}} = y_{(r+q)}$ 。

4.7.3 如果 $(M-q)/2$ 是整数, 取 $r=(M-q)/2$; 否则, 取 r 等于 $(M-q+1)/2$ 的整数部分, 可得概率对称包含区间 $[y_{(r)}, y_{(r+q)}]$ 。

注: 当 Y 的 PDF 关于估计值 y 对称时, 所求的包含区间相当于 JJF 1059.1 中的 $y \pm U_p$ 。

4.7.4 如果 PDF 不对称, 可采用最短包含区间。确定 r^* , 使得 $y_{(r^*+q)} - y_{(r^*)} \leq y_{(r+q)} - y_{(r)}$, $r=1, 2, \dots, M-q$, 可得最短包含区间 $[y_{(r^*)}, y_{(r^*+q)}]$ 。

4.7.5 对于对称的 PDF, 如 GUM 法中使用的正态分布和缩放位移 t 分布, 概率对称包含区间和最短包含区间是相同的。

例 1: 如 $p=95\%$, $M=10000$, 则包含区间可能为 $[y_{(1)}, y_{(9501)}]$, $[y_{(2)}, y_{(9502)}]$, \dots , $[y_{(500)}, y_{(10000)}]$ 。

例 2: 如 $p=95\%$, $M=10000$, 因 $(M-q)/2 = (1-p)M/2 = 250$, 则概率对称包含区间为 $[y_{(250)}, y_{(9750)}]$ 。

4.8 自适应蒙特卡洛方法

4.8.1 概要

在执行自适应蒙特卡洛方法的基本过程中, 蒙特卡洛试验次数不断增加, 直至所需要的各种结果达到统计意义上的稳定。如果某结果的两倍标准偏差小于标准不确定度 $u(y)$ 的数值容差时 (4.8.2), 则认定该数值结果稳定。

4.8.2 和一个数值有关的数值容差

z 相关的数值容差 δ 按下列方式给出。

首先, 将数值 z 表示为 $c \times 10^l$ 的形式。其中, c 是 n_{dig} 位十进制整数, l 是整数, n_{dig} 表示数值 z 的有效数字的个数。那么, z 的数值容差 δ 取

$$\delta = \frac{1}{2} 10^l \quad (18)$$

例 1: 标称值为 100 g 的标准砝码的输出量的估计值为 $y=100.02147$ g, 标准不确定度 $u(y)=0.00035$ g, 这两个有效数字都是有意义的。因此, $n_{\text{dig}}=2$ 时, $u(y)$ 表示为 35×10^{-5} g, 此时 $c=35$, $l=-5$, 则 $\delta=1/2 \times 10^{-5}$ g = 0.000005 g。

例 2: 若 $u(y)$ 只有一位有效数字有效, 其余同例 1。此时 $n_{\text{dig}}=1$, $u(y)=0.0004$ g = 4×10^{-4} g, 得到 $c=4$, $l=-4$, 因此 $\delta=1/2 \times 10^{-4}$ g = 0.00005 g。

例 3: 在温度测量中, $u(y)=2$ K, 则 $n_{\text{dig}}=1$, $u(y)=2 \times 10^0$ K, 此时 $c=2$, $l=0$, 因此 $\delta=1/2 \times 10^0$ K = 0.5 K。

4.8.3 自适应方法的目的

自适应方法的目的是为了获得:

- Y 的估计值 y ;
- 标准不确定度 $u(y)$;
- 约定包含概率下 Y 的包含区间的端点 y_{low} 和 y_{high} 。

以上四个值中的每一个可预期满足所需的数值容差。

注：

- 1 由于其随机特性，该方法不能保证能提供这样的区间。
- 2 就蒙特卡洛试验次数而言， y 和 $u(y)$ 的“收敛”速度通常要比 y_{low} 和 y_{high} 快得多。
- 3 通常情况下，包含概率越大，给定数值容差下确定 y_{low} 和 y_{high} 所需的蒙特卡洛试验次数就越大。

4.8.4 自适应方法的步骤

- a) 设 n_{dig} 为适当小的正整数 (4.8.2)；
- b) 设

$$M = \max(J, 10^4) \quad (19)$$

式中， J 是大于或等于 $100/(1-p)$ 的最小整数；

- c) 设 $h=1$ ，表示在序列中初次应用 MCM；
- d) 按 4.4 所示的方法，执行 M 次蒙特卡洛试验；
- e) 按 4.6 和 4.7 所示的方法，利用获得的 M 个模型值 y_1, y_2, \dots, y_M 计算 $y^{(h)}$ ， $u(y^{(h)})$ ， $y_{\text{low}}^{(h)}$ 和 $y_{\text{high}}^{(h)}$ ，它们分别为 Y 的估计值，标准不确定度，概率 p 的包含区间的左、右端点；
- f) 如果 $h=1$ ， h 增加 1，返回到步骤 d)；
- g) 按式 (20) 计算 Y 的估计值 $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(h)}$ 的平均值的标准偏差 s_y

$$s_y^2 = \frac{1}{h(h-1)} \sum_{r=1}^h (y^{(r)} - y)^2 \quad (20)$$

式中： $y = \frac{1}{h} \sum_{r=1}^h y^{(r)}$ 。

- h) 以相同的方式分别计算 $u(y^{(1)}), u(y^{(2)}), \dots, u(y^{(h)})$ 的平均值的标准偏差 $s_{u(y)}$ ， $y_{\text{low}}^{(1)}, y_{\text{low}}^{(2)}, \dots, y_{\text{low}}^{(h)}$ 的平均值的标准偏差 $s_{y_{\text{low}}}$ 以及 $y_{\text{high}}^{(1)}, y_{\text{high}}^{(2)}, \dots, y_{\text{high}}^{(h)}$ 的平均值的标准偏差 $s_{y_{\text{high}}}$ ；

- i) 利用所有的 $h \times M$ 个模型值来获得 $u(y)$ ；
- j) 计算 $u(y)$ 的数值容差 δ ；
- k) 如果 $2s_y, 2s_{u(y)}, 2s_{y_{\text{low}}}$ 和 $2s_{y_{\text{high}}}$ 中的任何一个值大于 δ ，则 h 增加 1 并返回到步骤 d)；
- l) 若 $2s_y, 2s_{u(y)}, 2s_{y_{\text{low}}}$ 和 $2s_{y_{\text{high}}}$ 中的任何一个值都小于 δ ，即所有的计算已达稳定，按 4.6 和 4.7 所示的方法，利用获得的 $h \times M$ 个模型值计算出 $y, u(y)$ 和概率 p 的包含区间。

注：

- 1 通常步骤 a) 中的 n_{dig} 选为 1 或 2。
- 2 步骤 b) 中，对 M 可任意选择，但是实际应用中需选择适当的 M 。

5 报告结果

5.1 根据概率分布传播的用途，对下述项目进行报告

- 1) 输出量 Y 的估计值 y ；
- 2) y 的标准不确定度 $u(y)$ ；

- 3) 包含概率 p (如 95%)；
- 4) Y 的概率 p 的包含区间 (如 95% 包含区间) 的端点；
- 5) 任何其他相关信息, 如包含区间是概率对称包含区间还是最短包含区间。

5.2 报告 Y 的 y , $u(y)$ 和概率 p 的包含区间的端点时, 都应采用十进制数字的形式, 其有效数字的末位相对于小数点的位置应与 $u(y)$ 有效数字的末位相一致。 $u(y)$ 通常取 1~2 位有效数字。

注:

- 1 在报告最终结果时, 一般采用修约规则将数据修约到需要的有效数字。修约规则参见 GB/T 8170—2008《数值修约规则与极限数值的表示和判定》。
- 2 $u(y)$ 的有效数字的首位为 1 或 2 时, 一般应给出两位有效数字。
- 3 如果在以后的计算中需要使用报告中的结果, 则应考虑是否多保留几位有效数字。

例: $u(y)$ 有效数字为两位, 包含区间关于 y 不对称, 报告的结果为

$y=1.024$ V, $u(y)=0.028$ V, 最短 95% 包含区间= $[0.983$ V, 1.088 V]。

如以 $u(y)$ 有效数字为一位时表示同样的结果, 则

$y=1.02$ V, $u(y)=0.03$ V, 最短 95% 包含区间= $[0.98$ V, 1.09 V]。

6 用蒙特卡洛法验证 GUM 法的结果

6.1 用蒙特卡洛法验证 GUM 法的结果

6.1.1 虽然 GUM 法在许多情况下被认为是非常适用的, 但是确定是否满足其所有应用条件并不总是一件容易的事。由于 MCM 的适用范围比 GUM 法的更广泛, 建议用 MCM 及 GUM 法两种方法, 并对结果进行比较。如果比较结果较好, 则 GUM 法适用于此场合及今后足够类似的情形。否则, 应考虑采用 MCM 或者其他合适的替代方法。

6.1.2 特别推荐采用下面步骤:

a) 应用 GUM 法 (可能应用基于高阶泰勒级数近似的不确定度传播律) 得到输出量的概率 p 的包含区间 $y \pm U_p$, 此处 p 为约定包含概率;

b) 运用自适应蒙特卡洛方法 (4.8.4) 获得输出量的标准不确定度 $u(y)$ 和概率对称或最短包含区间的端点值 y_{low} 和 y_{high} ;

c) 比较过程的目的是, 确定由 GUM 法及 MCM 获得的包含区间在约定的数值容差下是否一致。此数值容差根据包含区间的端点来评定, 且与不确定度 $u(y)$ 的有效十进制数字的有效数位相符合。具体过程如下:

1) 确定 $u(y)$ 的数值容差 δ ;

2) 对 GUM 法和 MCM 获得的包含区间进行比较, 确定是否能获得 GUM 法提供的包含区间中正确十进制数字的所需位数, 尤其可确定

$$d_{\text{low}} = |y - U_p - y_{\text{low}}| \quad (21)$$

$$d_{\text{high}} = |y + U_p - y_{\text{high}}| \quad (22)$$

即两个包含区间的各自端点的绝对偏差。如果 d_{low} 和 d_{high} 不大于 δ , 则 GUM 法可通过验证。

注: 由于不同概率 p 的包含区间的选择可能得到不同的比较结果, 因此上述验证仅适用于设定

的包含概率 p 。

6.2 用于验证 GUM 法的蒙特卡洛试验次数

为了 6.1 中的验证目的，在获取 MCM 结果过程中应采用足够大的蒙特卡洛试验次数 M 。当用 MCM 来验证 GUM 法时， n_{dig} 表示 $u(y)$ 的有效十进制数字的位数。 δ 表示 $u(y)$ 的数值容差。建议采用自适应蒙特卡洛法提供数值容差为 $\delta/5$ 时的 MCM 结果。在 4.8.4 的步骤 k) 中用 $\delta/5$ 取代 δ ，可获得此结果。

常见的输入量概率密度函数

X_i 独立时, 可根据一系列测量值的分析, 或根据某些历史数据、校准数据和专家经验之类的信息所得到的科学判断, 为各 X_i 设定 PDF $g_{X_i}(\xi_i)$, 见表 A。

当某些 X_i 相互独立时, 对它们的每一个都设定 PDF, 而为其余的 X_i 设定联合 PDF。

表 A.1 可获得信息及据此设定的 PDF


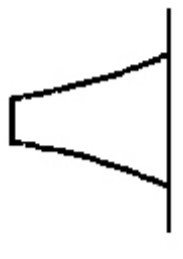
某量 X 的可获信息	X 所设定的分布	PDF	图示 (未按比例 绘制)
对于某量 X , 仅知其下限为 a , 上限为 b , $a < b$	矩形分布: $R(a, b)$	$g_X(\xi) = \begin{cases} 1/(b-a), & a \leq \xi \leq b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$	
已知一个量 X 位于下限 A 与上限 B 之间, $A < B$, 且 A 位于区间 $[a-d, a+d]$, B 位于区间 $[b-d, b+d]$, 这里 a 、 b 和 d 确定, 且规定 $d > 0$, $a+d < b-d$ 。	曲线梯形分布: CTrap(a, b, d)	$g_X(\xi) = \frac{1}{4d} \begin{cases} \ln[(w+d)/(x-\xi)], & a-d \leq \xi \leq a+d \\ \ln[(w+d)/(w-d)], & a+d < \xi < b-d \\ \ln[(w+d)/(\xi-x)], & b-d \leq \xi \leq b+d \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ <p>式中, $x = (a+b)/2$, $w = (b-a)/2$</p>	

表 A.1 (续)

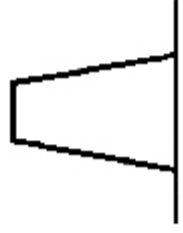
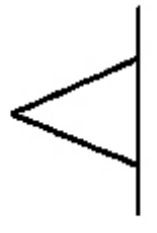

某量 X 的可获信息	X 所设定的分布	PDF	图示 (未按比例 绘制)
量 X 为两个独立量 X_1 和 X_2 的和, X_i 服从下限为 a_i 、上限为 b_i 的矩形分布 $R(a_i, b_i)$, $i=1, 2$	梯形分布: $\text{Trap}(a, b, \beta)$ 其中, $a=a_1+a_2$, $b=b_1+b_2$ $\beta = \frac{ (b_1-a_1) - (b_2-a_2) }{b-a}$	$g_X(\xi) = \begin{cases} (\xi-x+\lambda_2)/(\lambda_2^2-\lambda_1^2), & x-\lambda_2 \leq \xi < x-\lambda_1 \\ 1/(\lambda_1+\lambda_2), & x-\lambda_1 < \xi < x+\lambda_1 \\ (x+\lambda_2-\xi)/(\lambda_2^2-\lambda_1^2), & x+\lambda_1 < \xi < x+\lambda_2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 其中 $\lambda_1 = \frac{ (b_1-a_1) - (b_2-a_2) }{2}$, $\lambda_2 = \frac{b-a}{2}$, 且 $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$, $x = (a+b)/2$	
量 X 为两个独立量 X_1 和 X_2 的和, X_i 服从下限为 a_i 、上限为 b_i 的矩形分布 $R(a_i, b_i)$, $i=1, 2$, 且 $b_1-a_1=b_2-a_2$	三角分布: $T(a, b)$ 其中, $a=a_1+a_2$, $b=b_1+b_2$	$g_X(\xi) = \begin{cases} (\xi-a)/w^2, & a \leq \xi \leq x \\ (b-\xi)/w^2, & x < \xi \leq b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 式中 $x = (a+b)/2$, $w = (b-a)/2$	
量 X 在下限 a 、上限 b ($a < b$) 之间以未知相位 Φ 正弦周期变化, Φ 服从矩形分布 $R(0, 2\pi)$, $X = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \sin\Phi$	反正弦 (U 形) 分布: $U(a, b)$	$g_X(\xi) = \begin{cases} (1/\pi)[(b-\xi)(\xi-a)]^{-1/2}, & a < \xi < b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$	

表 A.1 (续)





某量 X 的可获信息	X 所设定的分布	PDF	图示 (未按比例 绘制)
量 X 的信息仅已知其最佳估计值 x 和标准不确定度 $u(x)$	正态分布: $N(x, u^2(x))$	$g_X(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}u(x)} \exp\left[-\frac{(\xi-x)^2}{2u^2(x)}\right]$	
如果仅知 N 维量 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)^T$ 的最佳估计 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)^T$ 及 (严格的) 正定不确定度矩阵 $ \mathbf{U}_x = \begin{bmatrix} u^2(x_1) & u(x_1, x_2) & \dots & u(x_1, x_N) \\ u(x_2, x_1) & u^2(x_2) & \dots & u(x_2, x_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(x_N, x_1) & u(x_N, x_2) & \dots & u^2(x_N) \end{bmatrix} $	多元正态分布: $N(\mathbf{x}, \mathbf{U}_x)$	$ g_X(\xi) = \frac{1}{[(2\pi)^N \det \mathbf{U}_x]^{1/2}} \times \exp\left[-\frac{1}{2}(\xi-x)^T \mathbf{U}_x^{-1} (\xi-x)\right] $	
可获得 n 个测量值 x_1, \dots, x_n , 这些测量值独立来自于服从正态分布 $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ 的量, 但期望 μ_0 、方差 σ_0^2 均未知。X 为 μ_0	缩放位移 t 分布: $t_{n-1}(\bar{x}, s^2/n)$ 其中, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$	$ g_X(\xi) = \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-1)/2) \sqrt{(n-1)} \pi} \times \frac{1}{s/\sqrt{n}} \times \left[1 + \frac{1}{n-1} \left(\frac{\xi-\bar{x}}{s/\sqrt{n}}\right)^2\right]^{-n/2} $ 其中, $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, x > 0$	

表 A.1 (续)

某量 X 的可获信息	X 所设定的分布	PDF	图示 (未按比例 绘制)
有关 X 量的信息来自于给出了最佳估计值 x 、扩展不确定度 U_p 、包含因子 k_p 和有效自由度 ν_{eff} 的校准证书	缩放位移 t 分布： $t_{\nu_{\text{eff}}}(x, (U_p/k_p)^2)$	$g_X(\xi) = \frac{\Gamma(\nu_{\text{eff}}/2)}{\Gamma((\nu_{\text{eff}}-1)/2) \sqrt{(\nu_{\text{eff}}-1)} \pi} \times \frac{1}{U_p/k_p} \times \left[1 + \frac{1}{\nu_{\text{eff}}-1} \left(\frac{\xi-x}{U_p/k_p} \right)^2 \right]^{-\nu_{\text{eff}}/2}$	
仅知非负量 X 的最佳估计值 $x > 0$	指数分布: $\text{Ex}(1/x)$	$g_X(\xi) = \begin{cases} \exp(-\xi/x)/x, & \xi \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$	

注: t 分布的概率密度函数为 $g(\xi) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2}) \sqrt{\nu\pi}} \left(1 + \frac{\xi^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$

附录 B

用蒙特卡洛法传播概率分布实例

B.1 加法模型

本例构建了一个加法模型。表明了当满足 GUM 法的应用条件时，MCM 与 GUM 法两者的结果一致。当输入量服从不同的 PDF 时，即使是相同的测量模型，也会因不能满足 GUM 法所有条件而表现出一定的偏差。

B.1.1 测量模型

本例的模型为

$$Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \quad (\text{B.1})$$

假设输入量 X_i 服从三组不同的 PDF $g_{X_i}(\xi_i)$ ，且相互独立。第一组，每个 $g_{X_i}(\xi_i)$ 为标准正态分布 PDF，即 X_i 的期望为 0，标准偏差为 1；第二组，每个 $g_{X_i}(\xi_i)$ 为矩形 PDF，同样地， X_i 的期望为 0，标准偏差为 1；第三组，除 $g_{X_4}(\xi_4)$ 的标准偏差为 10 外，其余与第二组相同。

B.1.2 输入量服从正态分布

B.1.2.1 各 X_i 服从标准正态分布， X_i 的最佳估计值为 $x_i = 0$ ，标准不确定度 $u(x_i) = 1$ ， $i = 1, 2, 3, 4$ 。

B.1.2.2 表 B.1 中前 5 列对结果作了概括。为了有助于相互间比较，报告的结果保留到三位有效数字。表中还给出 $\delta = 0.05$ 时的 GUM 法是否通过验证。

B.1.2.3 由不确定度传播律，可得到 Y 的估计值为 $y = 0.0$ 及标准不确定度为 $u(y) = 2.0$ ， $u(y)$ 保留两位有效十进制数字，数值容差为 $\delta = 0.05$ 。当包含因子为 1.96 时， Y 的概率对称 95% 包含区间为 $[-3.9, 3.9]$ 。

B.1.2.4 当取不同的试验次数时，应用 MCM 所得结果在数值容差内一致，即均为 $y = 0.0$ ， $u(y) = 2.0$ ，概率对称 95% 包含区间为 $[-3.9, 3.9]$ ，其中试验次数为 $M = 10^6$ 重复了两次（抽取 PDF 的随机样本不同），这是为了验证所获结果的差异性。表 B.1 中第 6 行和第 7 行的数值为当数值容差为 $\delta/5$ 时应用自适应蒙特卡洛法所得结果。表 B.1 第 6 列和第 7 列给出了端点偏差值 d_{low} 和 d_{high} （式 (21) 和式 (22)），第 8 列给出 $\delta = 0.05$ 时的 GUM 法均通过验证。

B.1.2.5 解析法得到 Y 的 PDF 的期望为 0，标准偏差为 2 的正态 PDF。

表 B.1 各 X_i 服从标准正态 PDF 时对模型式 (B.1) 分别应用 GUM 法、MCM 和解析法所得的结果

方法	M	y	$u(y)$	95% 概率对称 包含区间	d_{low}	d_{high}	GUM 法验证结果 ($\delta = 0.05$)
GUM 法	—	0.00	2.00	$[-3.92, 3.92]$	—	—	—
MCM	10^5	0.00	2.01	$[-3.94, 3.92]$	—	—	—
MCM	10^6	0.00	2.00	$[-3.92, 3.92]$	—	—	—

表 B.1 (续)

方法	M	y	$u(y)$	95%概率对称包含区间	d_{low}	d_{high}	GUM 法验证结果 ($\delta=0.05$)
MCM	10^6	0.00	2.00	$[-3.92, 3.92]$	—	—	—
自适应 MCM	1.23×10^6	0.00	2.00	$[-3.92, 3.93]$	0.00	0.01	是
自适应 MCM	0.86×10^6	0.00	2.00	$[-3.92, 3.92]$	0.00	0.00	是
解析法	—	0.00	2.00	$[-3.92, 3.92]$	—	—	—

B.1.2.6 图 B.1 给出了用 GUM 法获得的 Y 的 (正态) PDF 以及由 MCM 所提供的 PDF 的离散表示 G 的一种近似 [Y 的 M ($M=10^6$) 个模型值频率分布 (直方图)]。由两种方法所提供的概率对称 95% 包含区间的端点如图中垂直线所示。PDF 及其近似表示在直观上难以区分, 各自的包含区间同样如此。

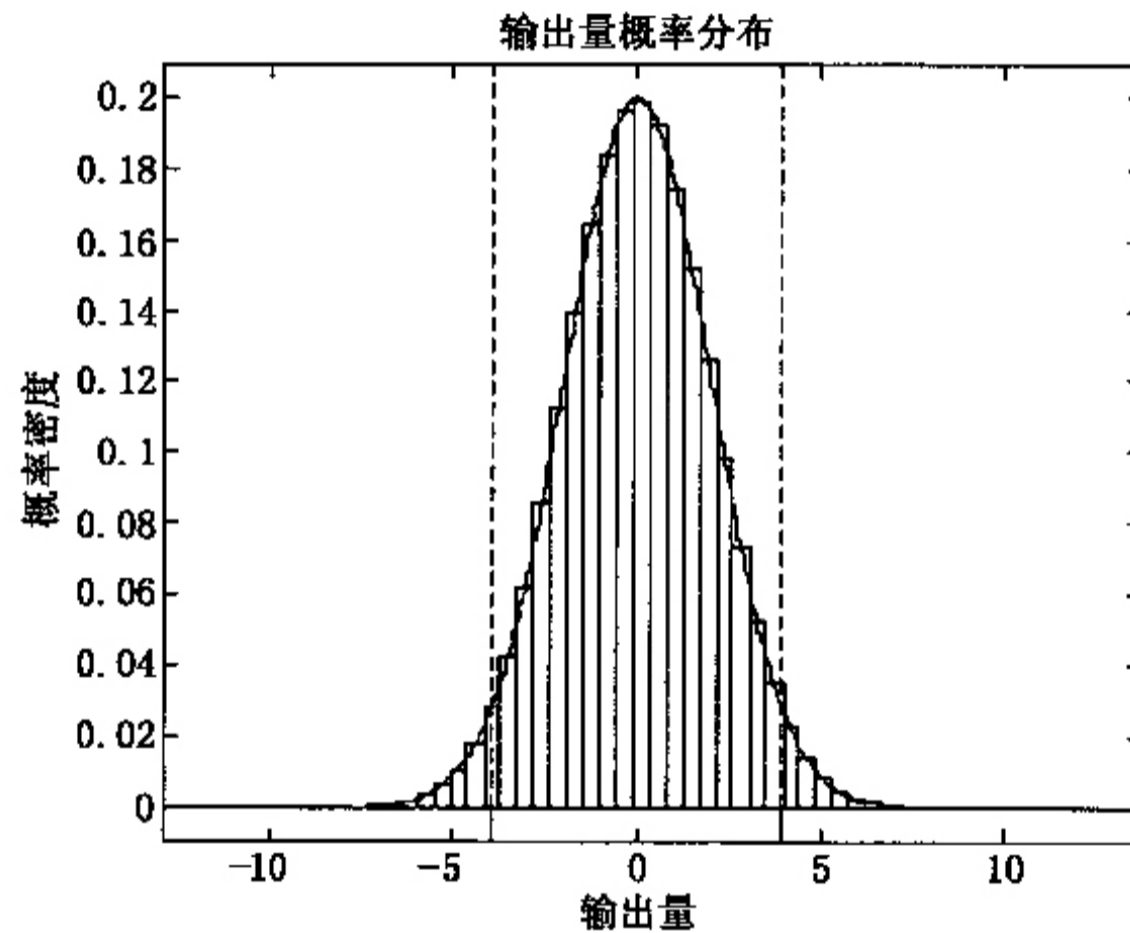


图 B.1 通过 GUM 法和 MCM 提供各 X_i 服从标准正态 PDF 时模型式 (B.1) 的近似概率分布

B.1.3 输入量服从相同宽度矩形分布

B.1.3.1 各 X_i 服从矩形 PDF, 且 X_i 的期望为 0, 标准偏差为 1。因此, X_i 的最佳估计值为 $x_i=0$, 标准不确定度 $u(x_i)=1$, $i=1, 2, 3, 4$ 。

B.1.3.2 按照类似 B.1.2.3~B.1.2.5 中的步骤, 可得出表 B.2 中的结果。概率对称 95% 包含区间的端点的解析解为 $\pm 2\sqrt{3} [2 - (3/5)^{1/4}] \approx \pm 3.88$ 。

注: 概率对称 95% 包含区间的端点的解析解的计算方法可参见 ISO/IEC GUIDE 98-3: 2008 的附件 1 的附录 E 《矩形分布的四重卷积的包含区间》 (Coverage interval for the four-fold convolution of a rectangular distribution)。

B.1.3.3 图 B.2 显示了与图 B.1 相对应的结果。通过与图 B.1 的比较可看出, 在 PDF 的近似表示之间存在细微的差异。包含区间的端点在直观上几乎难以区分, 但在表 B.2 中体现出微小的差别。

B.1.3.4 在本例中, 由 GUM 法确定的概率对称 95% 包含区间比解析法得到的要稍微

保守一些。验证结果见表 B.2 中第 6~8 列。数值容差为 $\delta=0.05$ 。端点差值 d_{low} 和 d_{high} 要大于正态分布量情况下的端点偏差值。对于自适应蒙特卡洛方法的第一个应用, GUM 法通过了验证。而对于第二个应用, 虽然 d_{low} 和 d_{high} 接近于数值容差 $\delta=0.05$, 仍然认为 GUM 法没有通过验证。这些不同的验证结果是由蒙特卡洛方法的随机特性所造成的。

表 B.2 除为矩形 PDF 外, 其余同表 B.1, 此时 X_i 存在相同的期望和标准偏差

方法	M	y	$u(y)$	95% 概率对称 包含区间	d_{low}	d_{high}	GUM 法验证结果 ($\delta=0.05$)
GUM 法	—	0.00	2.00	[-3.92, 3.92]	—	—	—
MCM	10^5	0.00	2.01	[-3.90, 3.89]	—	—	—
MCM	10^6	0.00	2.00	[-3.89, 3.88]	—	—	—
MCM	10^6	0.00	2.00	[-3.88, 3.88]	—	—	—
自适应 MCM	1.02×10^6	0.00	2.00	[-3.88, 3.89]	0.04	0.03	是
自适应 MCM	0.86×10^6	0.00	2.00	[-3.87, 3.87]	0.05	0.05	否
解析法	—	0.00	2.00	[-3.88, 3.88]	—	—	—

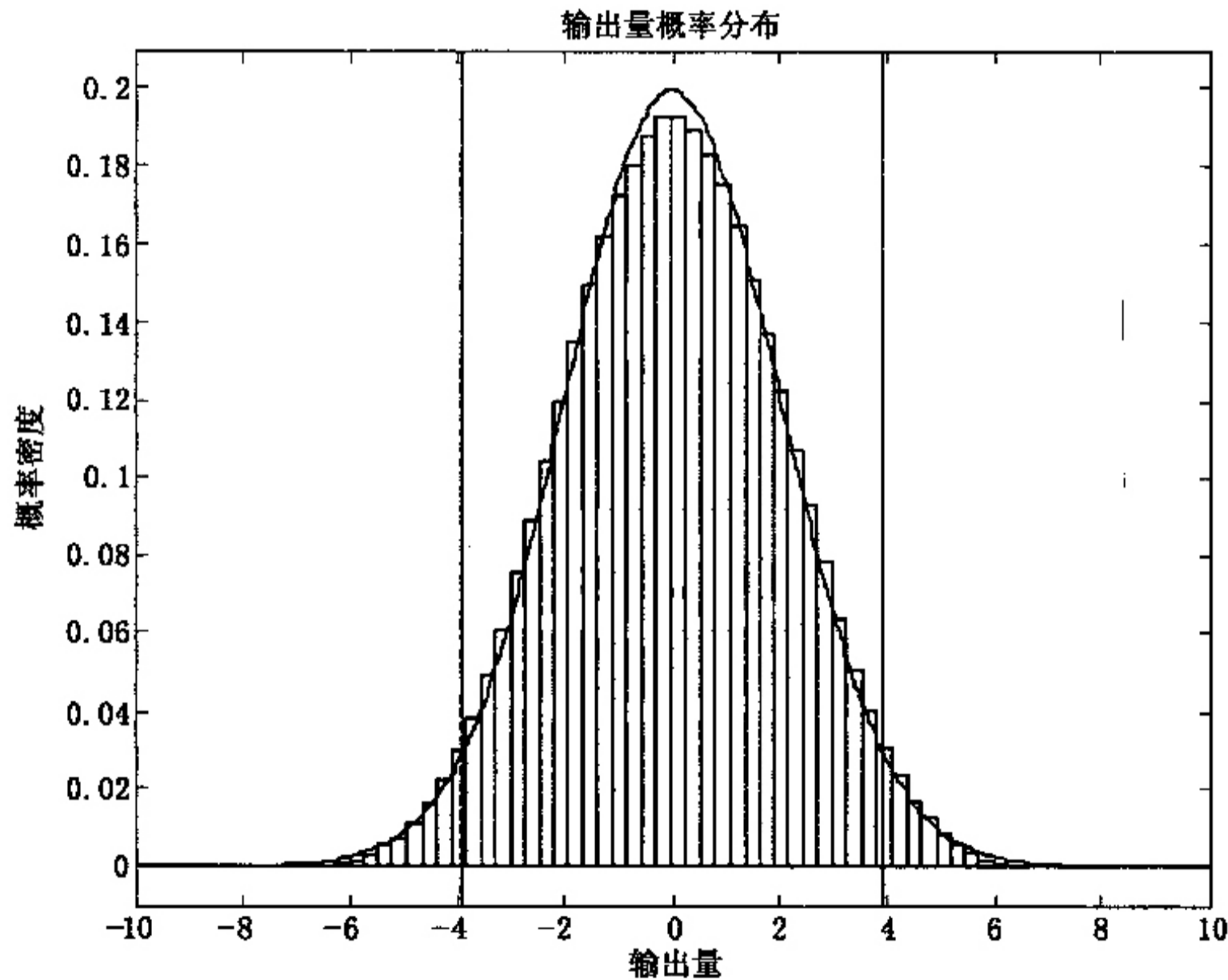


图 B.2 X_i 服从矩形 PDF 时, 与图 B.1 相对应的结果

B.1.4 输入量服从不同宽度矩形分布

B.1.4.1 将 B.1.3 中的 X_4 的标准偏差从 1 改为 10。表 B.3 给出了这种情况下所获得的结果。

表 B.3 如同表 B.2, 除第四个输入量的标准偏差为 10, 且未提供解析解

方法	M	y	$u(y)$	95% 概率对称包含区间	d_{low}	d_{high}	GUM 法验证结果 ($\delta=0.5$)
GUM 法	—	0.0	10.1	$[-19.9, 19.9]$	—	—	—
MCM	10^5	0.0	10.2	$[-17.0, 17.0]$	—	—	—
MCM	10^6	0.0	10.2	$[-17.0, 17.0]$	—	—	—
MCM	10^6	0.0	10.1	$[-17.0, 17.0]$	—	—	—
自适应 MCM	0.03×10^6	0.1	10.2	$[-17.1, 17.1]$	2.8	2.8	否
自适应 MCM	0.08×10^6	0.0	10.1	$[-17.0, 17.0]$	2.9	2.9	否

B.1.4.2 自适应方法中所取的蒙特卡洛试验次数 M (0.03×10^6 及 0.08×10^6) 远小于此例中前两种情况。主要原因是, 按 $u(y)$ 保留两位有效数字的要求得到的数值容差 $\delta=0.5$, 是以前的 10 倍。

B.1.4.3 图 B.3 给出了 Y 的 PDF 的两个近似表示, 两者明显不同。 X_4 的 PDF 占统治地位是明显的。 Y 的 PDF 与 X_4 的 PDF 非常相似, 但是在两翼存在其他 X_i 的 PDF 的影响。

B.1.4.4 图 B.3 还给出了由这些近似计算得到的 Y 的概率对称 95% 包含区间的端点。内侧的两条垂直实线表示由 MCM 所确定的概率对称 95% 包含区间的端点, 外侧的两条垂直虚线来自于 GUM 法, 包含因子 $k=1.96$ 。

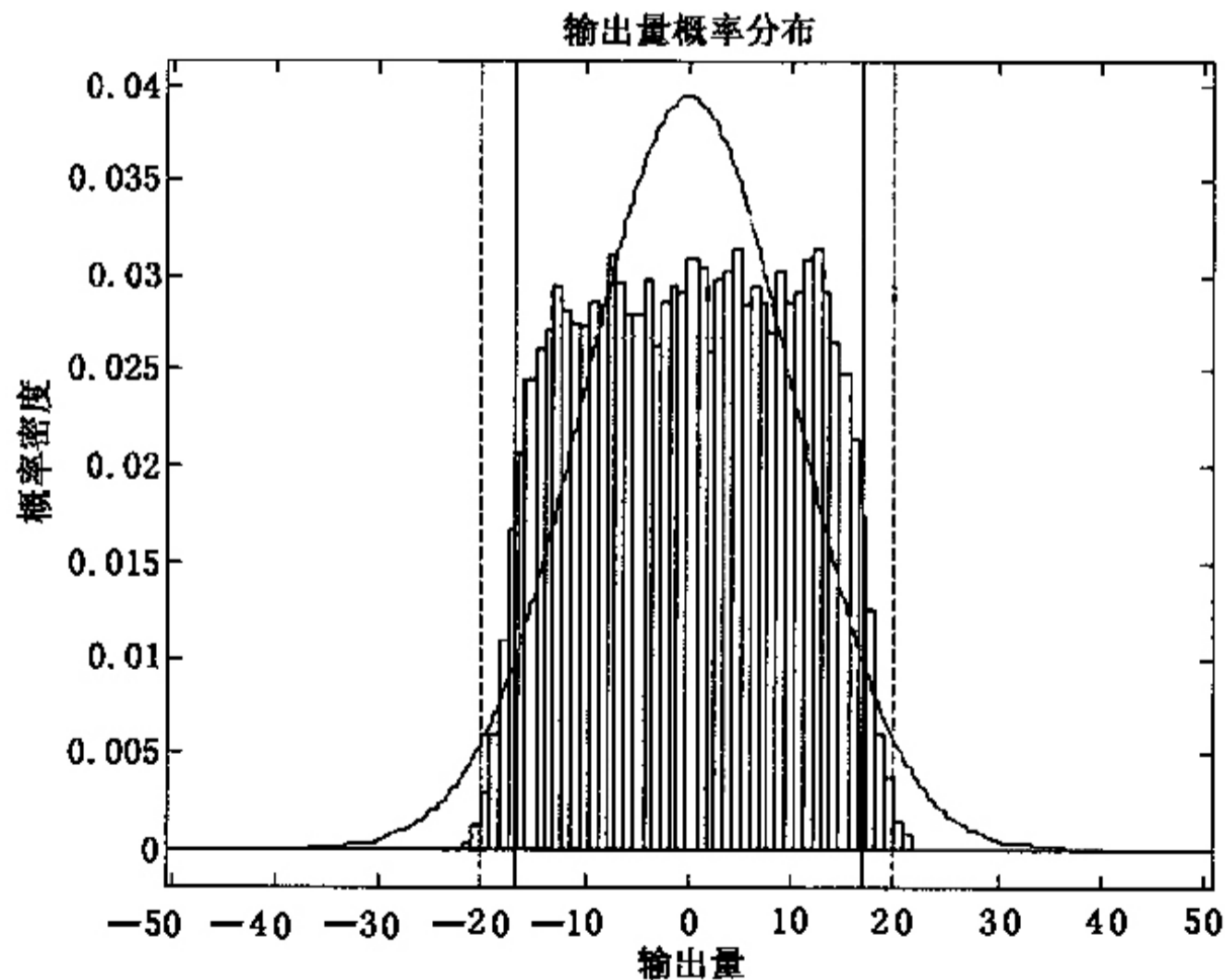


图 B.3 同图 B.2, 但第四个输入量的标准偏差为 10

B.1.4.5 在本例中,由 GUM 法确定的概率对称 95% 包含区间比解析得到的要稍微保守一些。再次应用验证程序(表 B.3 中第 6~8 列)。对于自适应蒙特卡洛法的两种应用, GUM 法均无效。如果 $u(y)$ 为 1 位有效数字,即 $\delta=5$ 时则两种情况的验证结果都是可靠的,95% 包含区间均为 $[-2 \times 10^1, 2 \times 10^1]$ 。

B.2 质量校准

本例是关于质量计量的校准问题,表明只有考虑了模型函数泰勒级数近似展开的高阶项时, GUM 法才有效。

B.2.1 测量模型

B.2.1.1 用质量密度为 ρ_R 的参考砝码 R 对质量密度为 ρ_W 的砝码 W 进行校准,两个砝码标称值相同,需要在质量密度为 ρ_a 的空气中进行平衡配重。通常 ρ_W 和 ρ_R 不同,因此需考虑浮力的影响,应用阿基米德定律,得到模型如式 (B.2)

$$m_W(1 - \rho_a/\rho_W) = (m_R + \delta m_R)(1 - \rho_a/\rho_R) \quad (\text{B.2})$$

其中, δm_R 是加到砝码 R 上的密度为 ρ_R 小砝码质量,以实现和 W 的平衡。

B.2.1.2 按照折算质量的计算方式, W 的折算质量 $m_{W,C}$ 是在密度为 ρ_{a0} ($\rho_{a0} = 1.2 \text{ kg/m}^3$) 的空气中平衡配重的密度为 $\rho_0 = 8\,000 \text{ kg/m}^3$ 的参考砝码质量,因此

$$m_W(1 - \rho_{a0}/\rho_W) = m_{W,C}(1 - \rho_{a0}/\rho_0)$$

B.2.1.3 以折算质量 $m_{W,C}$ 、 $m_{R,C}$ 以及 $\delta m_{R,C}$ 为变量,模型式 (B.2) 转变为

$$m_{W,C}(1 - \rho_a/\rho_W)(1 - \rho_{a0}/\rho_W)^{-1} = (m_{R,C} + \delta m_{R,C})(1 - \rho_a/\rho_R)(1 - \rho_{a0}/\rho_R)^{-1} \quad (\text{B.3})$$

对上述公式作近似处理,得

$$m_{W,C} = (m_{R,C} + \delta m_{R,C}) \left[1 + (\rho_a - \rho_{a0}) \left(\frac{1}{\rho_W} - \frac{1}{\rho_R} \right) \right]$$

设

$$\delta m = m_{W,C} - m_{\text{nom}}$$

为 $m_{W,C}$ 与标称质量 m_{nom} ($m_{\text{nom}} = 100 \text{ g}$) 的偏差。

本例中使用的模型为

$$\delta m = (m_{R,C} + \delta m_{R,C}) \left[1 + (\rho_a - \rho_{a0}) \left(\frac{1}{\rho_W} - \frac{1}{\rho_R} \right) \right] - m_{\text{nom}} \quad (\text{B.4})$$

注:由于偏导的解析计算复杂,难以对“精确”模型式 (B.3) 应用不确定度传播律,而采用直接计算模型值的 MCM 就显得比较容易了。

B.2.1.4 有关 $m_{R,C}$ 和 $\delta m_{R,C}$, 已知的信息仅是这些量的最佳估计值和标准不确定度。按表 A.1, 设定 $m_{R,C}$ 和 $\delta m_{R,C}$ 的分布都为正态分布,最佳估计值为其期望,标准不确定度为其标准偏差。对于 ρ_a , ρ_W 和 ρ_R , 只知道它们的上下限,按照表 A.1, 设定它们中的每一个的分布都为下限及上限为其端点的矩形分布。表 B.4 概括了输入量及对应的 PDF。对于正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 表 B.4 给出了期望 μ 及标准偏差 σ 的大小,对于端点为 a, b ($a < b$) 的矩形分布 $R(a, b)$, 给出了期望 $(a+b)/2$ 及半宽度 $(b-a)/2$ 的大小。

注:将不含不确定度的值 1.2 kg/m^3 赋予质量校准模型式 (B.4) 中量 ρ_{a0} 。

表 B.4 关于质量校准模型式 (B.4) 的输入量 X_i 及其服从的 PDF

X_i	分布	参数			
		期望 μ	标准偏差 σ	期望 $(a+b)/2$	半宽度 $(b-a)/2$
$m_{R,C}$	$N(\mu, \sigma^2)$	100 000.000 mg	0.050 mg	—	—
$\delta m_{R,C}$	$N(\mu, \sigma^2)$	1.234 mg	0.020 mg	—	—
ρ_s	$R(a, b)$	—	—	1.20 kg/m ³	0.10 kg/m ³
ρ_w	$R(a, b)$	—	—	8×10^3 kg/m ³	1×10^3 kg/m ³
ρ_R	$R(a, b)$	—	—	8.00×10^3 kg/m ³	0.05×10^3 kg/m ³

B.2.2 结果报告

B.2.2.1 分别应用 GUM 法及自适应蒙特卡洛法得到 δm 的估计值 $\widehat{\delta m}$ 、标准不确定度 $u(\widehat{\delta m})$ 及 δm 的最短 95% 包含区间, 如表 B.5 所示。表中 G_1 表示含一阶项的 GUM 法, MCM 为自适应蒙特卡洛法, G_2 则表示含高阶项的 GUM 法。

表 B.5 质量校准模型 (B.4) 的计算结果

方法	$\widehat{\delta m}$ mg	$u(\widehat{\delta m})$ mg	最短 95% 包 含区间	d_{low} mg	d_{high} mg	GUM 法验证结果 ($\delta=0.005$)
G_1	1.234 0	0.053 9	[1.128 5, 1.339 5]	0.045 1	0.043 0	否
MCM	1.234 1	0.075 4	[1.083 4, 1.382 5]	—	—	—
G_2	1.234 0	0.075 0	[1.087 0, 1.381 0]	0.003 6	0.001 5	是

B.2.2.2 根据 $u(\widehat{\delta m})$ 为一位有效数字来设置 δ , 即 $n_{dig}=1$, 因此 $u(\widehat{\delta m})=0.08=8 \times 10^{-2}$, $c=8$, $l=-2$, $\delta=1/2 \times 10^{-2}=0.005$ 。

B.2.2.3 图 B.4 给出了分别由含一阶项的 GUM 法及 MCM 获得的 δm 的 PDF 的近似。连续曲线表示参数由 GUM 法给出的正态 PDF, 内侧的两条 (虚) 垂直线为基于此 PDF 得到的 δm 最短 95% 包含区间。直方图是使用 MCM 获得的作为 PDF 的近似频率分布, 外侧的两条 (连续) 垂直线为 δm 的最短 95% 包含区间。

B.2.2.4 结果表明, 尽管 GUM 法 (一阶) 及 MCM 在给出的 δm 估计值具有很好的—致性, 但标准不确定度的大小显著不同。由 MCM 计算得到的 $u(\widehat{\delta m})$ (0.075 4 mg) 比由 GUM 法 (一阶) 计算得到的 $u(\widehat{\delta m})$ (0.053 9 mg) 大 40%, 后者有点高估。由 MCM 计算得到的 $u(\widehat{\delta m})$ 与由含高阶项的 GUM 法所提供的 $u(\widehat{\delta m})$ (0.075 0 mg) 基本—致。

B.2.2.5 表 B.5 最右侧的三列给出了应用 6.1 和 6.2 验证程序所获得的结果。表中最后一列给出当 $u(\widehat{\delta m})$ 保留一位有效数字时结果是否通过验证。如果仅考虑一阶项, 则 GUM 法未通过验证; 如果考虑了高阶项, 则 GUM 法有效。因此, 在讨论模型的非线性时, 仅考虑一阶项是不够的。

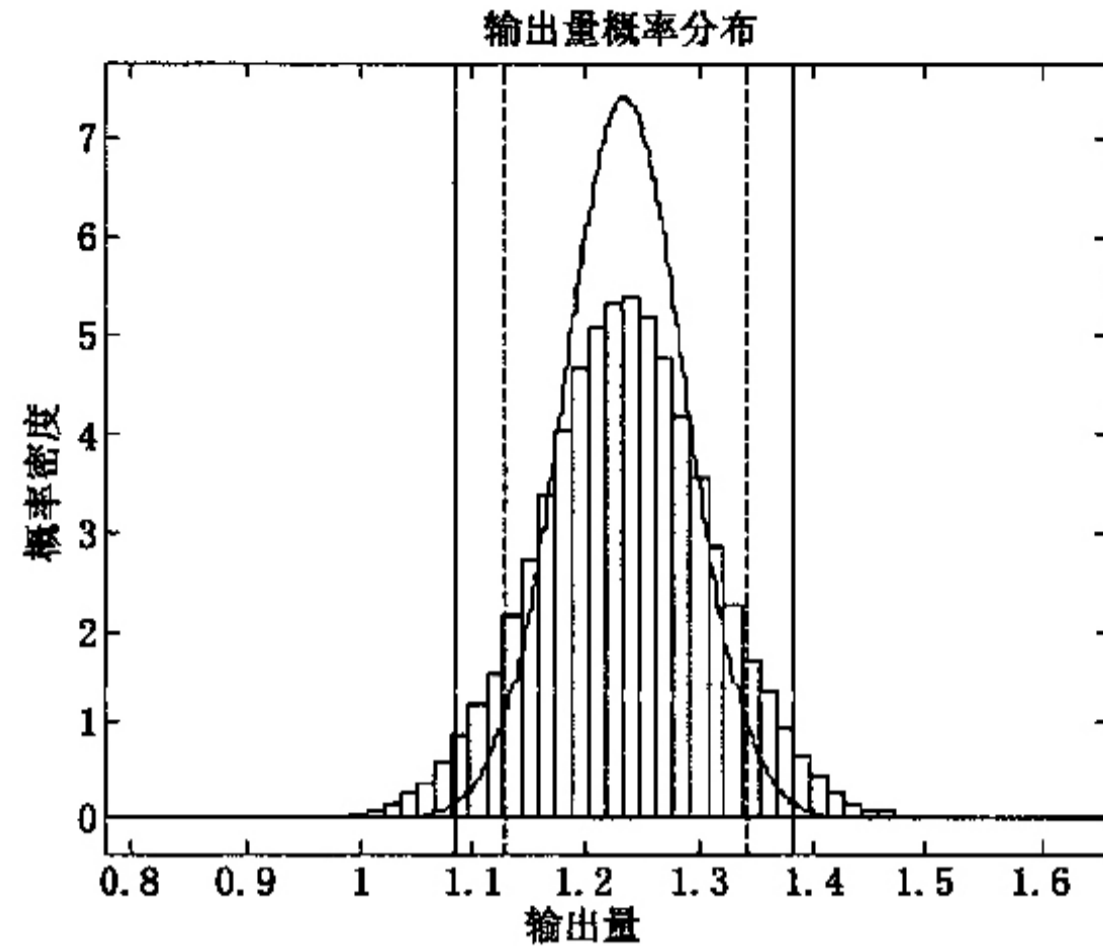


图 B.4 应用含一阶项的 GUM 法及 MCM 获得的输出量 δm 的 PDF 近似

B.2.2.6 对应表 B.6 的输入量及对应的 PDF，分别应用 GUM 法及自适应蒙特卡洛法得到 δm 的估计值 $\widehat{\delta m}$ 、标准不确定度 $u(\widehat{\delta m})$ 及 δm 的最短 95% 包含区间，如表 B.7 所示。结果表明，由 MCM 计算得到的 $u(\widehat{\delta m})$ 与由含高阶项的 GUM 法所提供的 $u(\widehat{\delta m})$ 以及 GUM 法（一阶）所提供的 $u(\widehat{\delta m})$ 基本一致。表中最后一列给出当 $u(\widehat{\delta m})$ 保留一位有效数字时结果均通过了验证。

表 B.6 关于质量校准模型 (B.4) 的输入量 X_i 及其服从的 PDF

X_i	分布	参 数			
		期望 μ	标准偏差 σ	期望 $(a+b)/2$	半宽度 $(b-a)/2$
$m_{R,C}$	$N(\mu, \sigma^2)$	100 000.000 mg	0.050 mg	—	—
$\delta m_{R,C}$	$N(\mu, \sigma^2)$	1.234 mg	0.020 mg	—	—
ρ_a	$R(a, b)$	—	—	1.20 kg/m ³	0.02 kg/m ³
ρ_w	$R(a, b)$	—	—	7.85×10^3 kg/m ³	0.05×10^3 kg/m ³
ρ_R	$R(a, b)$	—	—	7.85×10^3 kg/m ³	0.05×10^3 kg/m ³

表 B.7 质量校准模型 (B.4) 的计算结果

方法	$\widehat{\delta m}$ mg	$u(\widehat{\delta m})$ mg	最短 95% 包含区间	d_{low} mg	d_{high} mg	GUM 法验证结果 ($\delta=0.005$)
G_1	1.234 0	0.053 9	[1.128 5, 1.339 5]	0.000 7	0.000 3	是
MCM	1.234 1	0.053 8	[1.129 2, 1.339 8]	—	—	—
G_2	1.234 0	0.053 9	[1.128 5, 1.339 5]	0.000 7	0.000 3	是

B.3 微波功率计校准中的比较损耗

本实例中，输出量 PDF 显著不对称。本例表明即使考虑了所有的高阶项，GUM 法得出的结果也是不正确的。

B.3.1 测量模型

B.3.1.1 在微波功率计校准中，功率计和标准功率计依次连接到稳定的信号源。由于输入电压反射系数不同，各功率计吸收的功率通常并不相同。被校功率计吸收的功率 P_M 和标准功率计吸收的功率 P_S 的比值 Y 为

$$Y = \frac{P_M}{P_S} = \frac{1 - |\Gamma_M|^2}{1 - |\Gamma_S|^2} \times \frac{|1 - \Gamma_S \Gamma_G|^2}{|1 - \Gamma_M \Gamma_G|^2} \quad (\text{B.5})$$

式中， Γ_G 是信号源的电压反射系数， Γ_M 是被校功率计的电压反射系数， Γ_S 是标准功率计的电压反射系数，功率比为“比较损耗”的一个实例。

B.3.1.2 假设标准功率计和信号源无反射，即 $\Gamma_S = \Gamma_G = 0$ ，可测值为 Γ_M 的实部 X_1 和虚部 X_2 ， $\Gamma_M = X_1 + jX_2$ ， $j^2 = -1$ ，由于 $|\Gamma_M|^2 = X_1^2 + X_2^2$ ，式 (B.5) 变换为

$$Y = 1 - X_1^2 - X_2^2 \quad (\text{B.6})$$

B.3.1.3 通过测量可分别得到 X_1 和 X_2 的最佳估计值 x_1 和 x_2 及标准不确定度 $u(x_1)$ 和 $u(x_2)$ 。 X_1 和 X_2 通常不独立， $u(x_1, x_2)$ 表示 x_1 和 x_2 的协方差， $u(x_1, x_2) = r(x_1, x_2)u(x_1)u(x_2)$ ，式中 $r = r(x_1, x_2)$ 表示相关系数。

B.3.1.4 设定 $X = (X_1, X_2)^T$ 的 PDF 为 X_1 和 X_2 的二元正态 PDF，期望和协方差矩阵分别为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u^2(x_1) & ru(x_1)u(x_2) \\ ru(x_1)u(x_2) & u^2(x_2) \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

B.3.1.5 由于公式 (B.6) 中的 X_1 和 X_2 的大小实际上与单位 1 相比是个小量，因此计算得到的 Y 的值接近单位 1。测量模型可为

$$\delta Y = 1 - Y = X_1^2 + X_2^2$$

由物理性质可知， $0 \leq Y \leq 1$ ，因此 $0 \leq \delta Y \leq 1$ 。

B.3.1.6 对不同的 $x_1, x_2, u(x_1), u(x_2)$ ，计算 δY 的估计值 δy ，标准不确定度 $u(\delta y)$ 及 δy 的包含区间。

B.3.1.7 考虑六种不同取值情况，每种情况下 $x_2 = 0$ ，且 $u(x_1) = u(x_2) = 0.005$ 。前三种情况分别取 $x_1 = 0, 0.010, 0.050$ ， $r(x_1, x_2) = 0$ ，其他三种情况分别取 $x_1 = 0, 0.010, 0.050$ ， $r(x_1, x_2) = 0.9$ 。

B.3.1.8 在 $r = r(x_1, x_2) = 0$ 情况下，式 (B.7) 中的协方差矩阵简化为 $\text{diag}[u^2(x_1), u^2(x_2)]$ ，且 X_1 和 X_2 的相应联合分布简化为两个单变量 X_i 的正态分布的乘积，其期望为 x_i 、标准偏差为 $u(x_i)$ ， $i = 1, 2$ 。

B.3.2 传播和总结：零协方差

B.3.2.1 输入估计值 $x_1 = 0$

B.3.2.1.1 对于 $x_1 = 0$ ，应用不确定度传播律时，必须含高阶项，这是因为当 $x_1 =$

$x_2=0$ 时, δY 对于 X_1 和 X_2 的偏导数在 $X_1=x_1$, $X_2=x_2$ 处的值均为 0。如果使用仅含一阶项的不确定度传播律, 则标准不确定度的计算结果为 0, 这是不正确的。

注: 当 x_1 接近 0 时, 也会出现类似问题。

B.3.2.1.2 图 B.5 给出了通过以下途径由分布传播确定的 δY 的 PDF

- 1) 解析法 ($\delta Y \geq 0$ 时, 指数递减曲线, 其余为 0);
- 2) 含高阶项的 GUM 法 (钟形曲线);
- 3) MCM (频率分布)。

B.3.2.1.3 从图中可知, 应用含高阶项的 GUM 法所得到的 PDF 和解析解有很大区别。解析解为特定的 χ^2 分布——两个标准正态变量的平方和。

B.3.2.1.4 基于 GUM 法所得的结果与解析结果存在偏差, 其原因是 GUM 法认为输出量服从正态分布, 但实际上没有一个正态 PDF 能在此情况下足够表示解析结果。

B.3.2.1.5 从图 B.5 中可看出 MCM 提供的 PDF 与解析解一致。

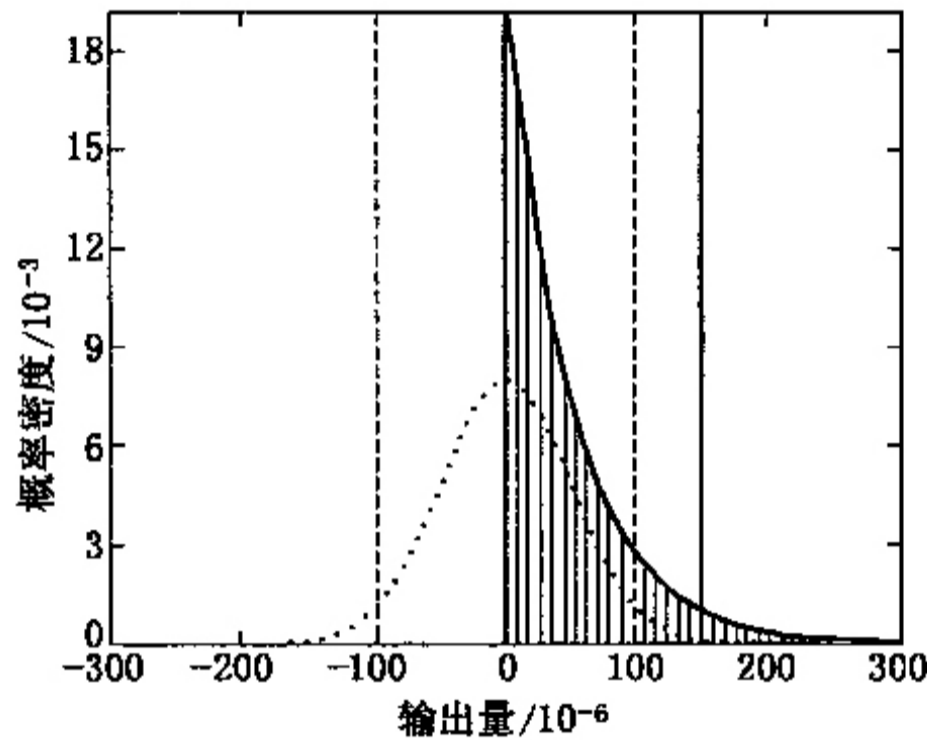


图 B.5 $x_1=x_2=0$, $u(x_1)=u(x_2)=0.005$, $r(x_1, x_2)=0$ 时,
功率计校准中比较损耗模型的结果

B.3.2.1.6 表 B.8 中对应行 $x_1=0.000$, 2~4 列给出了解析法、GUM 法以及 MCM 所获得的 δY 的估计值 δy , 5~8 列给出了相应的 $u(\delta y)$, 其中包括用含一阶项(G_1) 和含高阶项(G_2) 的 GUM 法所得结果。

B.3.2.1.7 计算模型在输入估计值处的值得到 $\delta y=0$ 是不合理的。MCM 提供的估计值与解析结果一致。仅含一阶项的不确定度传播律给出的 $u(\delta y)$ 值为零也是不合理的。含高阶项的不确定度传播律得到的结果 (50×10^{-6}) 与解析结果及 MCM 获得的结果一致。

B.3.2.1.8 图 B.5 还给出了 δY 的几种近似分布函数的最短 95% 包含区间, 具体数值见表 B.6 中对应行 $x_1=0.000$ 的 9~12 列。图中虚垂直线所示的 GUM 法所提供的 95% 包含区间, 是不切实际的: 关于 $\delta Y=0$ 对称, 因此意味着 δY 为负有 50% 概率, 这是错误的。实垂直线是解析解的最短 95% 包含区间的端点。从图形上无法区分最短 95% 包含区间的端点究竟是利用 MCM 获得的还是解析法得到的。

表 B.8 协方差为零时, 解析法 (A)、
含一阶项的 GUM 法 (G_1)、含高阶项的 GUM 法 (G_2) 以及 MCM (M) 获得的比较损耗结果

x_1	估计值 $\delta y/10^{-6}$			标准不确定度 $u(\delta y)/10^{-6}$				δY 的最短 95% 包含区间/ 10^{-3}			
	A	G	M	A	G_1	G_2	M	A	G_1	G_2	M
0.000	50	0	50	50	0	50	50	[0,150]	[0,0]	[-98,98]	[0,150]
0.010	150	100	150	112	100	112	112	—	[-96,296]	[-119,319]	[0,367]
0.050	2550	2500	2551	502	500	502	502	—	[1520,3480]	[1515,3485]	[1590,3543]

B.3.2.2 输入估计值 $x_1=0.010$

B.3.2.2.1 图 B.6 给出了应用仅含一阶项、含高阶项的 GUM 法以及应用 MCM 获得的 PDF。

B.3.2.2.2 图 B.6 还给出了由三种方法获得的最短 95% 包含区间的端点。实垂直线、粗垂直虚线和细虚垂直线分别是由 MCM、含一阶项的 GUM 法及含高阶项的 GUM 法提供的区间端点。和 MCM 的最短 95% 包含区间相比, 由 GUM 法提供的区间向左侧偏移。因此, 它们也包括不切实际的 δY 值。偏移量约为标准不确定度的 70%。MCM 提供的区间左端点位于零点处, 即最小可实现值。

B.3.2.2.3 表 B.8 中的倒数第二行给出了相应的结果。

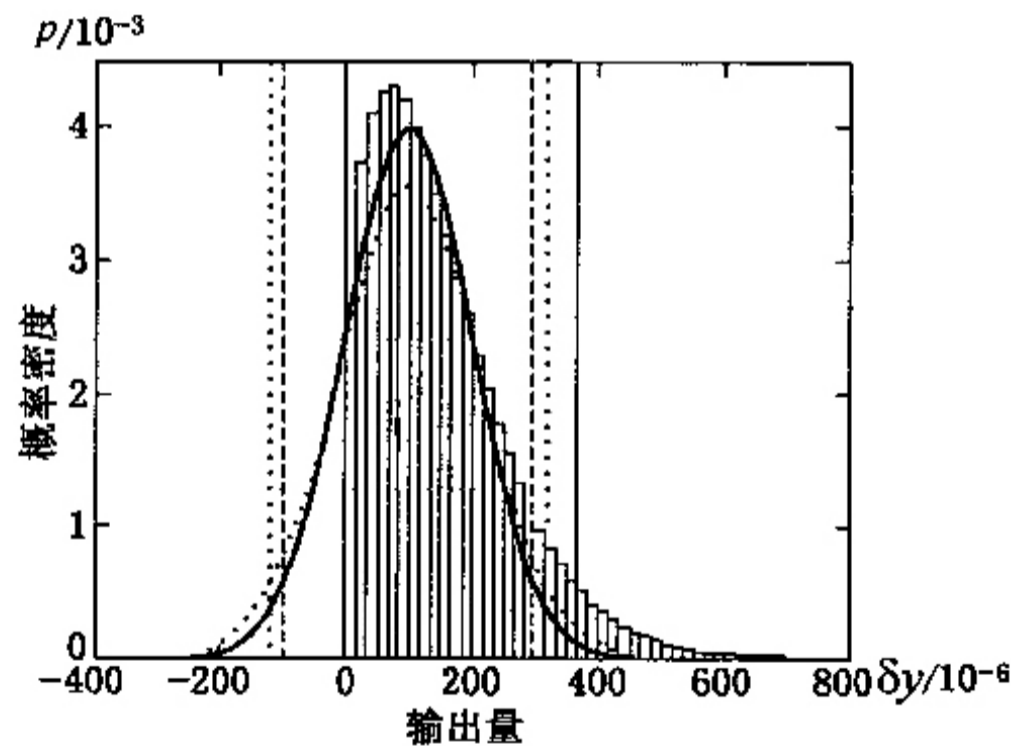
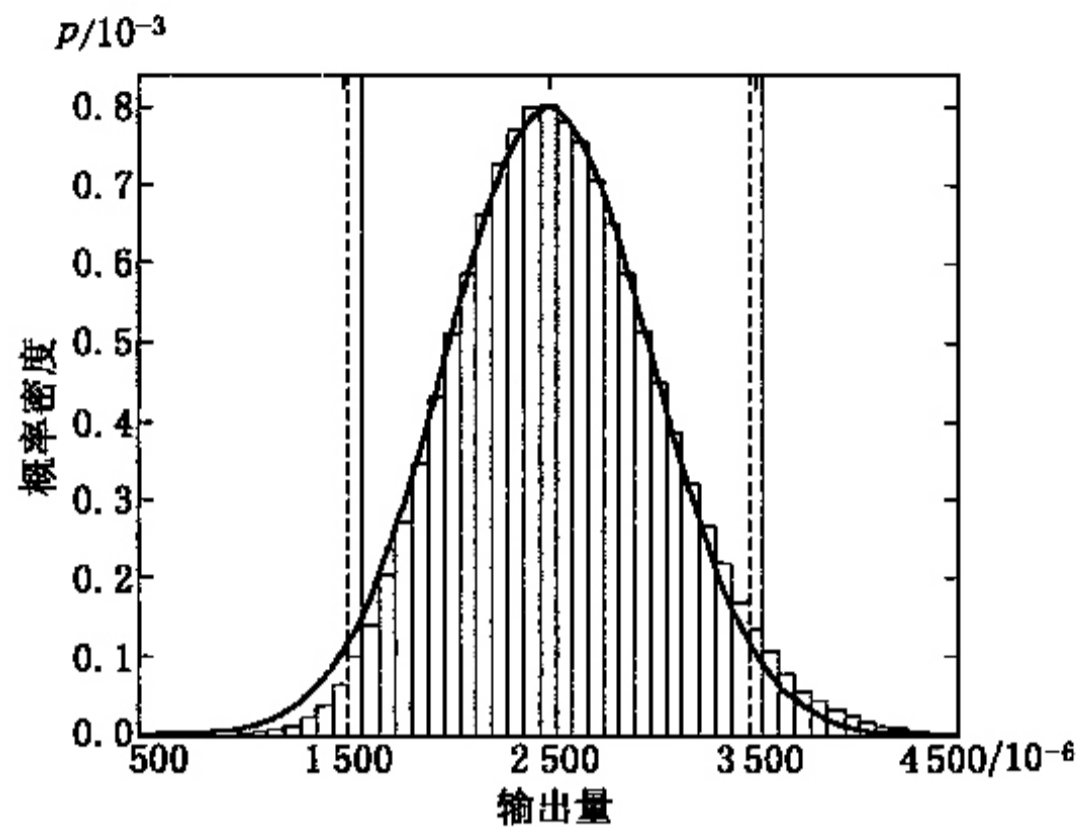


图 B.6 同图 B.5, 但 $x_1=0.010$, 及由含一阶项的 GUM 法 (高峰值曲线)
及含高阶项的 GUM 法 (低峰值曲线) 获得 PDF

B.3.2.3 输入估计值 $x_1=0.050$

B.3.2.3.1 图 B.7 和图 B.6 类似, 但 $x_1=0.050$ 。这里, 由仅含一阶项、含高阶项的这两种 GUM 法所提供的 PDF 互相之间无法明显区分, 且与 MCM 提供的 PDF 近似也非常接近。由两种 GUM 法所提供的包含区间几乎相同, 但是和 MCM 得到的包含区间仍然有偏移, 偏移量约为标准不确定度的 10%。GUM 法提供的区间此时是可行的。

图 B.7 同图 B.6, 但 $x_1 = 0.050$

B.3.2.3.2 表 B.8 中的最后一行给出了相应的结果。

B.3.2.4 说明

当 x_1 从零开始不断变大, 由含一阶项及含高阶项的 GUM 法得到的结果与由 MCM 得到的结果之间越来越接近。

注:

- 1 $x_1 = x_2 = 0$ 是电气工程师感兴趣的数值, 是被校功率计称之为“匹配”条件, 而非极端条件。
- 2 由于模型关于 X_1 和 X_2 对称, 当用 x_2 取代 x_1 时, 也会产生同样的效果。

B.3.3 传播和总结: 非零协方差

B.3.3.1 X_1 和 X_2 相关, 且相关系数 $r(x_1, x_2) = 0.9$ 。 X_2 取值 $x_2 = 0$, 而 $x_1 = 0, 0.010, 0.050$, $u(x_1) = u(x_2) = 0.005$ 。

B.3.3.2 只应用仅含一阶项的 GUM 法。和 X_i 无关情况不同, 不使用含高阶项的 GUM 法。

B.3.3.3 对于含一阶项的 GUM 法, $x_2 = 0$ 时, $u(\delta y)$ 的表达式为

$$u^2(\delta y) = 4x_1^2 u^2(x_1)$$

$u(\delta y)$ 不依赖于 $r(x_1, x_2)$, 含一阶项的 GUM 法与 B.3.2 中给出的结果相同。尤其是对于 $x_1 = 0$, $u(\delta y)$ 的计算结果为 0, 这是不正确的。

B.3.3.4 通过对给定期望和协方差矩阵 (式 (B.7)) 的二维正态 PDF 表征的 X 的随机抽样以实施 MCM。

B.3.3.5 输入估计值 $x_1 = 0, 0.010$ 和 0.050

B.3.3.5.1 表 B.9 给出了计算结果。MCM 得到的结果表明, 虽然 δy 不受 X_i 之间相关性的影响, 但是 $u(\delta y)$ 还是受到了影响, 对于较小的 x_1 更是如此。相应地也影响到 95% 包含区间。

表 B.9 协方差不为零 ($r(x_1, x_2)=0.9$) 时,
解析法 (A)、GUM 法 (G) 以及 MCM (M) 获得的比较损耗结果

x_1	估计值 $\delta y/10^{-6}$			标准不确定度 $u(\delta y)/10^{-6}$			δY 的最短 95% 包含区间/ 10^{-3}		
	A	G	M	A	G	M	A	G	M
0.000	50	0	50	67	0	67	—	[0,0]	[0,185]
0.010	150	100	150	121	100	121	—	[-96,296]	[13,398]
0.050	2 550	2 500	2 551	505	500	504	—	[1 520,3 480]	[1 628,3 555]

B.3.3.5.2 图 B.8 和 B.9 分别给出了 $x_1=0.010$ 和 $x_1=0.050$ 时, 由含一阶项 (钟形曲线) 的 GUM 法和 MCM (频率分布) 所提供的 PDF。图 B.8 和 B.9 也给出了由这两种方法所提供的最短 95% 包含区间的端点。GUM 法和 MCM 提供的最短 95% 包含区间端点分别以垂直虚线和垂直实线所示。

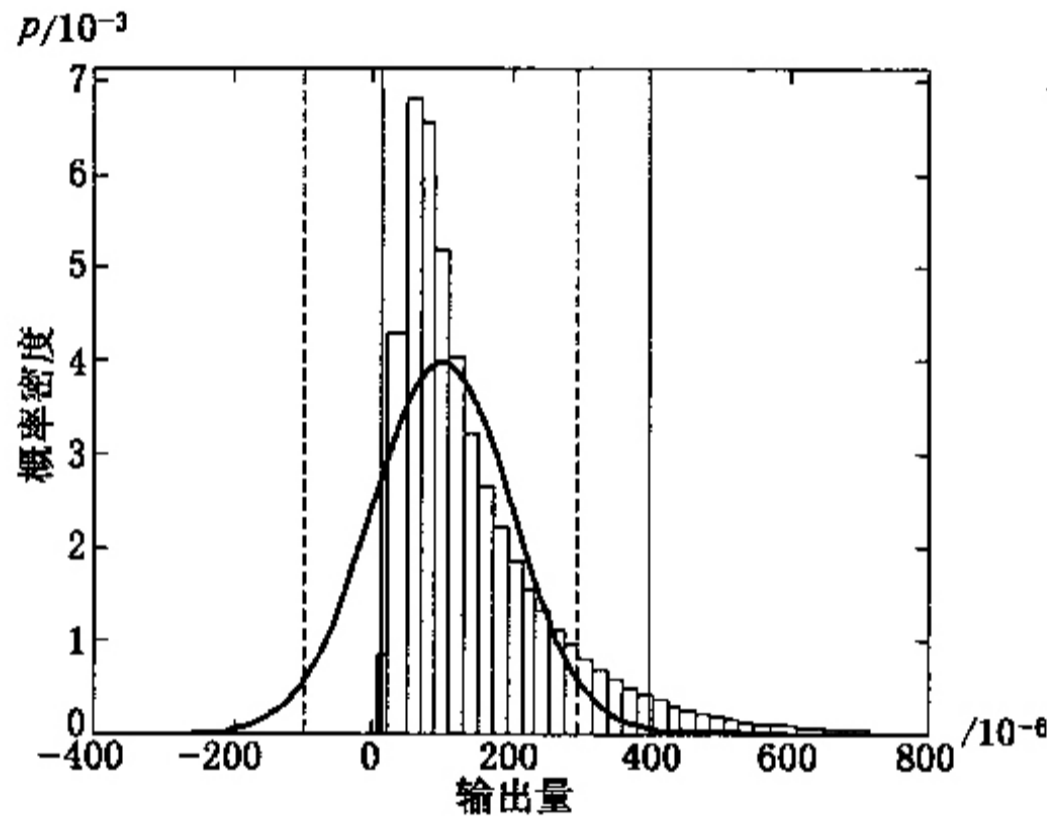


图 B.8 $x_1=0.010$, $x_2=0$, $u(x_1)=u(x_2)=0.005$, $r(x_1, x_2)=0.9$ 时,
功率计校准中比较损耗模型的结果

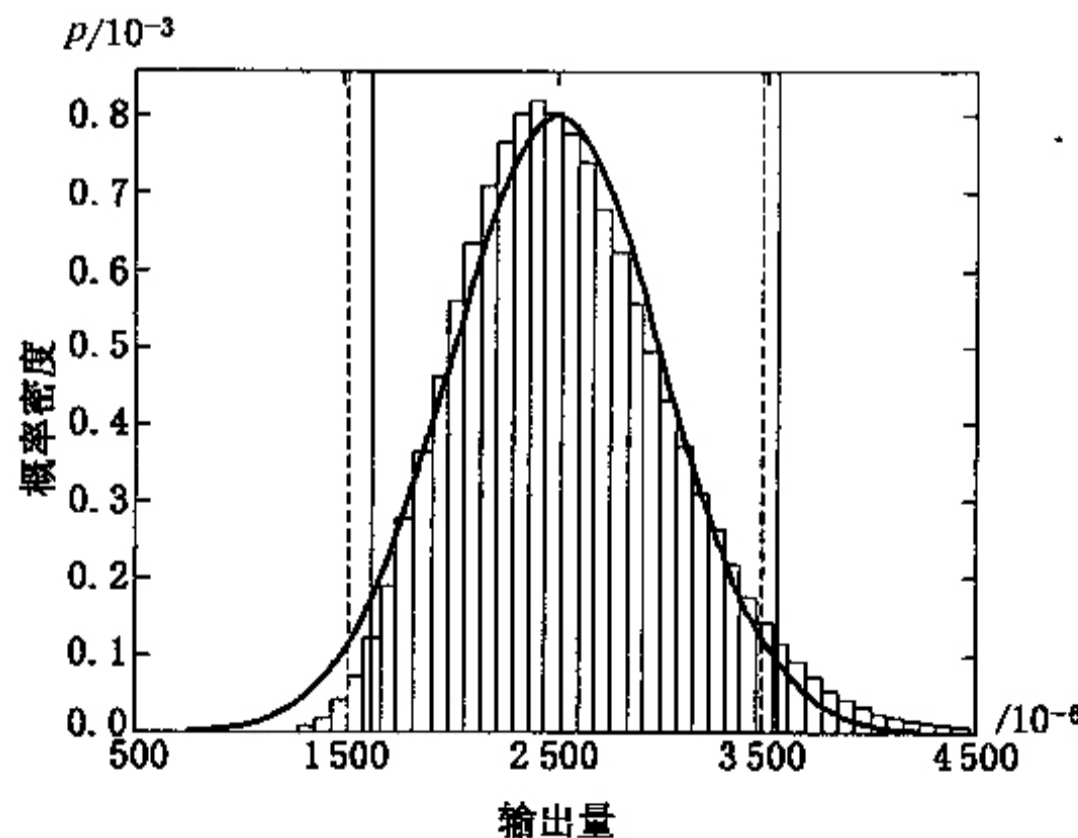


图 B.9 同图 B.8, 但 $x_1=0.050$

B.3.3.6 说明

当 $x_1=0.010$ 时 (图 B.8), 相关性的影响已显著地改变了 MCM 获得的结果 (和图 B.6 比较), 不仅改变了 PDF 的形状, 而且相应的包含区间的左端点不再为零。当 $x_1=0.050$ 时 (图 B.9), 输入量不相关或相关时的结果之间的差异并不明显 (和图 B.7 比较)。

B.4 量块校准

本例是 GUM 法中量块校准的问题。GUM 法和 MCM 的结果比较表明, 两者没有明显差异。

B.4.1 测量模型

B.4.1.1 标称值为 50 mm 的被校量块, 通过与相同标称值的标准量块比较, 能确定其长度。比较该两个量块的长度, 得到长度差

$$d=L(1+\alpha\theta)-L_s(1+\alpha_s\theta_s) \quad (\text{B.8})$$

式中:

L ——被校准量块在 20 °C 时的长度;

L_s ——标准量块在 20 °C 时的长度, 由校准证书给出;

α 和 α_s ——被校量块和标准量块的热膨胀系数;

θ 和 θ_s ——被校量块和标准量块的温度与 20 °C 参考温度的差值。

B.4.1.2 由式 (B.8) 得到输出量 L 的公式为

$$L=\frac{L_s(1+\alpha_s\theta_s)+d}{1+\alpha\theta} \quad (\text{B.9})$$

取线性近似已足够满足大多数实际情况

$$L=L_s+d+L_s(\alpha_s\theta_s-\alpha\theta) \quad (\text{B.10})$$

被校量块和标准量块间的温度差以 $\delta\theta=\theta-\theta_s$ 表示, 热膨胀系数的差以 $\delta\alpha=\alpha-\alpha_s$ 表示, 则式 (B.9) 和 (B.10) 分别为

$$L=\frac{L_s[1+\alpha_s(\theta-\delta\theta)]+d}{1+(\alpha_s+\delta\alpha)\theta} \quad (\text{B.11})$$

和

$$L=L_s+d+L_s(\theta\delta\alpha+\alpha_s\delta\theta) \quad (\text{B.12})$$

B.4.1.3 用比较仪测量被校量块和标准量块的长度差 d , 独立重复测量 5 次

$$d=D+d_1+d_2 \quad (\text{B.13})$$

式中:

D ——5 次测量的平均值;

d_1 和 d_2 ——使用比较仪的随机影响和系统影响。

B.4.1.4 被校量块温度与 20 °C 参考温度的差值 θ 为

$$\theta=\theta_0+\Delta \quad (\text{B.14})$$

式中:

θ_0 ——量块偏离 20 °C 的平均温度差值;

Δ ——偏离 θ_0 的周期性变化的温差。

B.4.1.5 将式 (B.13) 和 (B.14) 代入式 (B.11) 和 (B.12), δL 表示 L 和量块的标称长度 $L_{\text{nom}}=50 \text{ mm}$ 之间的差, 则

$$\delta L = \frac{L_s [1 + \alpha_s (\theta_0 + \Delta - \delta\theta)] + D + d_1 + d_2}{1 + (\alpha_s + \delta\alpha) (\theta_0 + \Delta)} - L_{\text{nom}} \quad (\text{B.15})$$

和

$$\delta L = L_s + D + d_1 + d_2 - L_s [\delta\alpha (\theta_0 + \Delta) + \alpha_s \delta\theta] - L_{\text{nom}} \quad (\text{B.16})$$

式 (B.15) 和式 (B.16) 作为测量模型。模型的输出量为 δL , 输入量为 L_s , D , d_1 , d_2 , α_s , θ_0 , Δ , $\delta\alpha$ 和 $\delta\theta$ 。

B.4.2 设定 PDF

根据模型式 (B.15) 和式 (B.16) 中各输入量的可获信息, 表 B.10 对分布的设定进行了总结。

表 B.10 量块模型 (B.15) 和 (B.16) 的输入量设定 PDF

变量	可获信息						设定分布
	μ	σ	ν	a	b	d	
L_s	50 000 623 nm	25 nm	18	—	—	—	$t_\nu(\mu, \sigma^2)$
D	215 nm	6 nm	24	—	—	—	$t_\nu(\mu, \sigma^2)$
d_1	0 nm	4 nm	5	—	—	—	$t_\nu(\mu, \sigma^2)$
d_2	0 nm	7 nm	8	—	—	—	$t_\nu(\mu, \sigma^2)$
α_s	—	—	—	$9.5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$13.5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	—	$R(a, b)$
θ	$-0.1 \text{ } ^\circ\text{C}$	$0.2 \text{ } ^\circ\text{C}$	—	—	—	—	$N(\mu, \sigma^2)$
Δ	—	—	—	$-0.5 \text{ } ^\circ\text{C}$	$0.5 \text{ } ^\circ\text{C}$	—	$U(a, b)$
$\delta\alpha$	—	—	—	$-1.0 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$1.0 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$0.1 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$\text{Ctrap}(a, b, d)$
$\delta\theta$	—	—	—	$-0.050 \text{ } ^\circ\text{C}$	$0.050 \text{ } ^\circ\text{C}$	$0.025 \text{ } ^\circ\text{C}$	$\text{Ctrap}(a, b, d)$

B.4.3 结果报告

B.4.3.1 GUM 法

本例应用 GUM 法基于:

- 模型式 (B.15) 或式 (B.16) 的一阶泰勒级数近似;
- 运用韦尔奇-萨特思韦特公式计算由不确定度传播律获得的不确定度的有效自由度 (舍掉小数部分);
- 输出量服从自由度为上述有效自由度的缩放位移 t 分布。

B.4.3.2 蒙特卡洛方法

本例应用 MCM 基于:

- 从矩形分布, 正态分布, t 分布, U 形分布, 界限未精确给定的矩形分布抽样;
- 自适应的 MCM, 数值容差 ($\delta=0.5$), 标准不确定度的有效数字 $n_{\text{dig}}=2$ 。

B.4.4 结果说明

B.4.4.1 利用表 B.10 中总结的信息, 表 B.11 给出了有关近似模型式 (B.16) 的结

果。图 B.11 给出了由 GUM 法获得的 δL 的 PDF (实线) 及由 MCM 获得的 δL 的 PDF (频率分布)。由 GUM 法获得自由度 $\nu=16$ 的 t 分布。由这些分布获得 δL 的最短 99% 包含区间端点, 垂直线所示, 是不可分辨的。

B.4.4.2 采用自适应 MCM, 试验次数为 1.26×10^6 。

表 B.11 模型 (B.16) 获得的结果

方法	$\widehat{\delta L}/\text{nm}$	$u(\widehat{\delta L})/\text{nm}$	$\delta L/\text{nm}$ 最短 99% 包含区间
GUM 法	838	32	[745, 931]
MCM	838	36	[745, 932]

B.4.4.3 有关非线性模型式 (B.15) 获得的结果和表 B.11 给出的结果相同, 只是有效数字的位数有所区别。

B.4.4.4 获得的结果之间存在细微的差异。应用 MCM 获得的 $u(\widehat{\delta L})$ 比应用 GUM 法的要大 4 nm。获得的 δL 的 99% 包含区间长度要大 1 nm。在非线形模型中同样存在这种差异, 这样的差异是否重要需根据该结果的具体用途来判断。

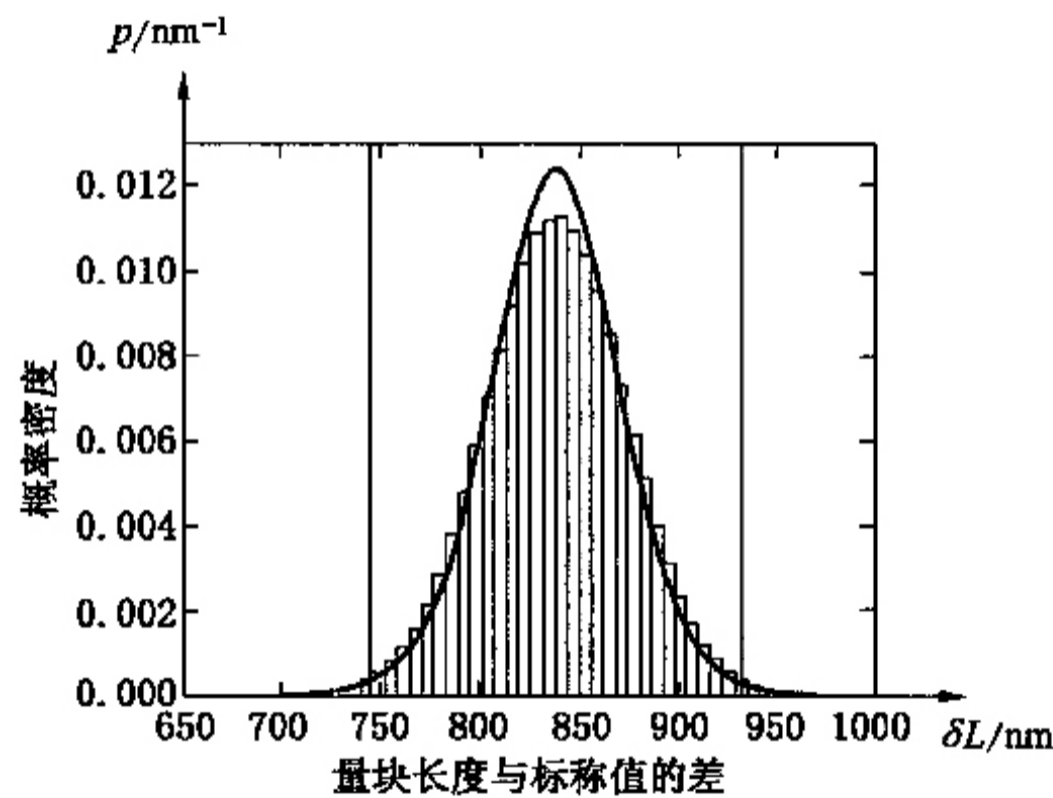


图 B.10 对模型式 (B.16) 用 GUM 法 (实钟形曲线) 及 MCM (直方图) 获得 δL 的 PDF

附录 C

MCM 与 GUM 法的比较

C.1 为了比较 MCM 和 GUM 法，有必要回顾一下 GUM 法中关于 A 类和 B 类不确定度评定是如何考虑的。对于 A 类评定，GUM 法对如何由某个量的一系列测量值的平均值及对应的标准偏差，得到该量的最佳估计值及其标准不确定度提供了指导。对于 B 类评定，利用有关某个量的先验知识确定一个 PDF 来表征该量，然后根据该 PDF 可确定该量的最佳估计值及其标准不确定度。GUM 法表明，两种评定方法都基于概率分布，且均采用了公认的概率解释。GUM 法认为 PDF 加强了不确定度评定的基础：在不确定度传播律中，明确地指出输入输出量是由概率分布所描述或表征的量。

C.2 本规范力图提供一种与 GUM 法尽可能一致的方法，尤其涉及所有量的 PDF 的使用时的一致性。但某些场合也存在明显的差异，这些差异包括：

a) 根据输入量 X_i 的有关信息，明确地将 PDF 设定给所有输入量 X_i （而不是 X_i 的估计 x_i 的标准不确定度），无需将不确定度评定分成 A 类和 B 类。

b) 虽然，若考虑了模型的泰勒级数展开中的所有高阶项，可得到灵敏系数的近似值。但由于灵敏系数并非本方法要专门阐述的内容，因此所述方法中不包含对模型的 X_i 的偏导数的计算或数值近似计算的内容。

c) 可获得 Y 的分布函数的数值表示，此数值表示完全由模型和各 X_i 的 PDF 所定义，且不限于正态分布或缩放位移 t 分布。

d) 由于 Y 的 PDF 通常不对称，所以 Y 的包含区间不一定以 Y 的估计值为中心，因此需要考虑如何选择约定包含概率的包含区间。

C.3 由于 GUM 法仅明确地使用了最佳估计值 x_i 及其不确定度（必要时也包括协方差和自由度），因此它所提供得有关 Y 的信息受到限制。基本上，它局限于提供 Y 的估计 y 及其标准不确定度 $u(y)$ ，也许还包括（有效）自由度。只有利用了如 Y 的分布为正态分布或缩放位移 t 分布等附加假设，GUM 法才能得到关于 Y 的其他信息，如包含区间。

C.4 MCM 的主要特点如下：

a) 对于复杂或非线性模型，尤其是无需使用一阶或高阶偏导来提供不确定度传播律的灵敏系数，可减小分析难度。

b) 非线性模型时，一般可改善 Y 的估计。

c) 非线性模型时，尤其是 X_i 服从非正态（如不对称）PDF 时，无需提供高阶导数即可改善 Y 的估计的标准不确定度。

d) 当 Y 的 PDF 不能由正态分布或缩放位移 t 分布充分近似时，即无法应用中心极限定理时，可提供给定包含概率下的包含区间。这种不适当的近似出现的场合可能有：1) 一个占主导地位 X_i 的 PDF 不是正态分布或缩放位移 t 分布；2) 模型非线性；3) 使用韦尔奇-萨特思韦特公式计算有效自由度时，引入的近似误差不可忽略。

e) 确定包含区间时无需包含因子。

附录 D

分布传播的基本原理

D.1 概率分布的传播

在本规范中,考虑一种通用的有效方法来确定 Y 的概率分布函数

$$G_Y(\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} g_Y(z) dz$$

该方法就是基于蒙特卡洛方法实现概率分布的传播。

注:

Y 的 PDF 的正式定义为

$$g_Y(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g_X(\xi) \delta(\eta - f(\xi)) d\xi_N \cdots d\xi_1$$

式中 $\delta(\cdot)$ 指 Dirac Delta 函数。由于这多维积分通常不能解析计算,可运用数值积分原理获得 $g_Y(\eta)$ 的近似值,但这并非是一种有效的方法。

D.2 分布传播的实施方法

D.2.1 分布的传播有以下几种实施方法

- a) 解析方法,即提供 Y 的 PDF 的数学表达式的方法;
- b) 利用一阶泰勒级数近似替代模型,进行不确定度传播——不确定度传播律;
- c) 用含高阶项的泰勒级数近似模型进行不确定度传播;
- d) 使用蒙特卡洛法等数值模拟的方法。

注:

- 1 解析方法不引入任何的近似,故是理想的方法,但只能在简单情况下才适用。如线性模型

$$Y = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \cdots + c_N X_N$$

式中, c_1, c_2, \cdots, c_n 为常数, X_i 分别服从正态分布 $N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i=1, 2, \cdots, N$ 。则 Y 也服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 其中 $\mu = c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2 + \cdots + c_N \mu_N$, $\sigma^2 = c_1^2 \sigma_1^2 + \cdots + c_N^2 \sigma_N^2$ 。

- 2 蒙特卡洛法是一种普遍有效的提供输出量分布的数值近似方法。
- 3 b) 和 c) 是 GUM 中推荐使用的方法。

D.2.2 在评定测量不确定度时必须选择合适的分布传播方法。如果经论证表明,满足使 GUM 法给出有效结果所必需的条件,可采用 GUM 法;即使在这种情况下,像计算灵敏系数比较困难等情形,应用 MCM 可能更容易。如有迹象表明 GUM 法可能无效时, MCM 因其不需要做任何近似的假设,通常能给出有效的结果。难以判断 GUM 法是否适用时,采用 MCM 比较稳妥,也可用它评价由 GUM 法提供的结果的质量。

附录 E

基本符号

A	随机变量，表示界限未精确给定的矩形分布下限
a	一个随机变量所在区间的下限
a	界限未精确给定的矩形分布下限 A 所在区间的中点
B	随机变量，表示界限未精确给定的矩形分布上限
b	一个随机变量所在区间的上限
b	界限未精确给定的矩形分布上限 B 所在区间的中点
$CTrap(a, b, d)$	界限未精确给定（曲线梯形分布）的矩形分布，其参数为 a 、 b 和 d
$Cov(X_i, X_j)$	两个随机变量 X_i 和 X_j 的协方差
c	n_{dig} 位十进制小数整位数
d	界限未精确给定的矩形分布下限 A 和上限 B 所在区间的半宽度
d_{high}	分别由 GUM 法和 MCM 提供的包含区间的右端点之差的绝对值
d_{low}	分别由 GUM 法和 MCM 提供的包含区间的左端点之差的绝对值
$E(X)$	随机变量 X 的期望
$E(\mathbf{X})$	向量随机变量 \mathbf{X} 的向量期望
$E(X^r)$	随机变量 X 的 r 阶矩
$Ex(\lambda)$	参数为 λ 的指数分布
f	表示输出量 Y 和与 Y 有关的输入量 X_1, X_2, \dots, X_N 之间的测量数学模型
G	蒙特卡洛过程中输出变量 Y 的分布函数的离散表示
$G(\alpha, \beta)$	参数为 α 和 β 的伽马分布
$g_X(\xi)$	输入量 X 的变量为 ξ 的概率密度函数
$g_{\mathbf{X}}(\xi)$	输入向量 \mathbf{X} 的向量变量为 ξ 的联合（多元变量）概率密度函数
$g_{X_i}(\xi_i)$	输入量 X_i 的变量为 ξ_i 的概率密度函数
$G_Y(\eta)$	输出量 Y 的变量为 η 的分布函数
$g_Y(\eta)$	输出量 Y 的变量为 η 的概率密度函数
J	大于或等于 $100/(1-p)$ 的最小整数
k_p	对应包含概率 p 的包含因子
l	数值的 $c \times 10^l$ 表示中的整数，其中 c 为 n_{dig} 位十进制小数整位数
M	蒙特卡洛的试验次数
N	输入量 X_1, X_2, \dots, X_N 的个数
$N(0, 1)$	标准正态分布
$N(\mu, \sigma^2)$	参数为 μ 和 σ^2 的正态分布
$N(\mu, V)$	参数为 μ 和 V 的多元正态分布
n	一个系列中示值的个数

n_{dig}	数值中的有意义的有效十进制数字的个数
$\text{Pr}(z)$	事件 z 的概率
p	包含概率
q	$pM+1/2$ 的整数部分
$R(0, 1)$	区间 $[0, 1]$ 上的标准矩形分布
$R(a, b)$	区间 $[a, b]$ 上的矩形分布
s	n 个示值 x_1, x_2, \dots, x_n 的标准偏差
s_z	自适应蒙特卡洛程序中的值 $z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(n)}$ 的平均值 z 的标准偏差, 其中, z 可以表示输出变量 Y 的估计值 y , y 的标准不确定度 $u(y)$, 或者 Y 的包含区间的左端点 y_{low} 或者右端点 y_{high}
$T(a, b)$	区间 $[a, b]$ 上的三角分布
$\text{Trap}(a, b, \beta)$	参数为 β 的区间 $[a, b]$ 上的梯形分布
t_ν	自由度为 ν 的中心 t 分布
$t_\nu(\mu, \sigma^2)$	参数为 μ 和 σ^2 , 自由度为 ν 的缩放平移 t 分布
$U(0, 1)$	区间 $[0, 1]$ 上的标准反正弦 (U形) 分布
$U(a, b)$	区间 $[a, b]$ 上的反正弦 (U形) 分布
U_p	对应于包含概率 p 的扩展不确定度
U_x	向量输入变量 \mathbf{X} 的向量估计值 \mathbf{x} 的不确定度矩阵
$\mathbf{u}(\mathbf{x})$	向量输入变量 \mathbf{X} 的向量估计值 \mathbf{x} 的不确定度向量 $[u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_N)]^T$
$u(x_i)$	输入量 X_i 的估计值 x_i 的标准不确定度
$u(x_i, x_j)$	输入量 X_i 和 X_j 的估计值 x_i 和 x_j 的协方差
$u(y)$	输出量 Y 的估计值 y 的标准不确定度
$u(\tilde{y})$	\tilde{y} 的标准不确定度
$u_c(y)$	输出量 Y 的估计值 y 的合成标准不确定度
$u_i(y)$	输出量 Y 的估计值 y 的标准不确定度 $u(y)$ 中的第 i 个不确定度分量
V	协方差 (方差协方差矩阵) 矩阵
$V(X)$	随机变量 X 的方差
$V(\mathbf{X})$	向量随机变量 \mathbf{X} 的协方差矩阵
w	区间 $[a, b]$ 的半宽度 $(b-a)/2$
X	输入量, 为随机变量
\mathbf{X}	与输出量 Y 相关的输入量向量 $(X_1, X_2, \dots, X_N)^T$, 为随机变量
X_i	与输出量 Y 相关的第 i 个输入量, 为随机变量
x	X 的估计值 (期望)
\mathbf{x}	\mathbf{X} 的向量估计值 $(x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ (向量期望)
\bar{x}	某组 n 个示值 x_1, x_2, \dots, x_n 的平均值

x_i	X_i 的估计值 (期望) 或某组中第 i 个示值
$x_{i,r}$	X_i 的概率密度函数的第 r 个蒙特卡洛样本
x_r	第 r 个蒙特卡洛样本, 包含数值 $x_{1,r}, x_{2,r}, \dots, x_{N,r}$, 是从 N 个输入变量 X_1, X_2, \dots, X_N 的概率密度函数或是从 X 的联合概率密度函数抽取的
Y	(标量) 输出量, 为随机变量
y	Y 的估计值 (期望)
\tilde{y}	Y 的估计值, 即一次蒙特卡洛运行中的 M 个模型值 y_r 的平均值或者由概率密度分布函数 $\tilde{g}_Y(\eta)$ 表征的 Y 的期望
y^{high}	Y 的包含区间的右端点
y^{low}	Y 的包含区间的左端点
y_r	第 r 个模型值 $f(x_r)$
$y_{(r)}$	将 y_r 进行升序排列后的第 r 个模型值
$z^{(h)}$	自适应蒙特卡洛程序的第 h 个值, 其中, z 可以表示输出变量 Y 的估计值 y , y 的标准不确定度 $u(y)$, 或者 Y 的包含区间的左端点 y^{low} 或者右端点 y^{high}
α	概率值
α	伽马分布的参数
β	梯形分布的参数, 等于梯形顶部的半宽度与梯形底部的半宽度之比
β	伽马分布的参数
$\Gamma(z)$	变量为 z 的伽马函数
δ	一个数值的数值容差
$\delta(z)$	变量为 z 的狄拉克函数
η	变量, 描述输出量 Y 的可能值
λ_1	梯形分布中梯形顶部的半宽度
λ_2	梯形分布中梯形底部的半宽度
μ	由一个概率分布表征的变量的期望
ν	t 分布或是 χ^2 分布的自由度
ν_{eff}	标准不确定度 $u(y)$ 的有效自由度
ν_p	从多个系列的示值的合并标准偏差 s_p 的自由度
ξ	变量, 描述随机变量 X 的可能值
ξ	向量变量 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)^T$, 描述输入向量变量 X 的可能值
ξ_i	变量, 描述输入量 X_i 的可能值
σ	一个概率分布表征的变量的标准偏差
σ^2	一个概率分布表征的变量的方差 (标准偏差的平方)
Φ	呈正弦周期变化的变量的相位
χ_ν^2	自由度为 ν 的 χ^2 分布

附录 F

常用术语的英汉对照

A

arc sine distribution 反正弦分布
 assignment to a quantity 给某个量设定分布
 average of a set of indications 一组测量值的平均值

B

Bayes' theorem 贝叶斯定理
 Bayesian interval 贝叶斯区间
 best estimate 最佳估计值

C

calibration certificate 校准证书
 Cauchy distribution 柯西分布
 central limit theorem 中心极限定理
 chi-squared distribution χ^2 分布
 Cholesky decomposition 柯勒斯基分解
 combined standard uncertainty 合成标准不确定度
 convolution 卷积
 correlated input quantities 相关输入量
 correlation coefficient 相关系数
 covariance 协方差
 covariance matrix 协方差矩阵
 coverage factor 包含因子
 coverage interval 包含区间
 coverage probability 包含概率
 credible interval 置信区间
 curvilinear trapezoid distribution 曲线梯形分布

D

degree of belief 可信度
 degrees of freedom 自由度
 deviation 偏差
 distribution function 分布函数

E

Erlang distribution 厄兰分布
estimate of output quantity 输出量的估计值
expanded uncertainty 扩展不确定度
expectation 期望
exponential distribution 指数分布

F

finite difference approximation 有限差分近似

G

gamma distribution 伽马分布
gamma function 伽马函数
Gaussian distribution 正态分布
GUM uncertainty framework (GUF) GUM 法
Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM) 测量不确定度表示指南

I

International vocabulary of metrology—Basic and general concepts and associated terms (VIM) 国际计量学词汇——基本通用的概念和相关术语

L

level of confidence 置信的水平

M

Monte Carlo method (MCM) 蒙特卡洛法
mode 众数
model of measurement 测量模型
multivariate Gaussian distribution 多维正态分布

N

normal distribution 正态分布
numerical tolerance 数值容差

O

output quantity 输出量

P

partial derivative 偏导数
 probability density function (PDF) 概率密度函数
 Poisson distribution 泊松分布
 principle of maximum entropy 最大熵原理
 probability 概率
 probability distribution 概率分布
 propagation of distributions 分布传播
 propagation of uncertainty 不确定度传播

R

random variable 随机变量
 rectangular distribution 均匀分布
 rectangular distribution with inexactly prescribed limits 界限未精确给定的矩形分布
 rectangular number generator 均匀分布随机数发生器
 reliability of uncertainty 不确定度的可靠性
 reporting the results 报告结果

S

sensitivity coefficients 灵敏系数
 significant decimal digits 有效数字
 skewness 峰态系数
 sorting algorithm 排序算法
 summarizing 总结
 standard deviation 标准偏差
 standard uncertainty 标准不确定度

T

t -distribution t 分布
 Taylor series approximation 泰勒级数展开
 tests of randomness 随机性的测试
 trapezoidal distribution 梯形分布
 triangular distribution 三角分布
 Type A and Type B evaluations of uncertainty A类和B类不确定度评定

U

U-shaped distribution *see* arc sine distribution U形分布, 即反正弦分布

uncertainty evaluation 不确定度评定

uncertainty matrix 不确定度矩阵

V

variance 方差

variance-covariance matrix 协方差矩阵

W

Welch-Satterthwaite formula 韦尔奇-萨特思韦特公式

中 华 人 民 共 和 国
国 家 计 量 技 术 规 范
用蒙特卡洛法评定测量不确定度

JJF 1059.2—2012

国家质量监督检验检疫总局发布

*

中国质检出版社出版发行
北京市朝阳区和平里西街甲2号(100013)
北京市西城区三里河北街16号(100045)

网址 www.spc.net.cn

总编室:(010)64275323 发行中心:(010)51780235

读者服务部:(010)68523946

中国标准出版社秦皇岛印刷厂印刷
各地新华书店经销

*

开本 880×1230 1/16 印张 3 字数 84 千字
2013年3月第一版 2013年3月第一次印刷

*

书号: 155026·J-2765 定价 42.00 元

如有印装差错 由本社发行中心调换
版权专有 侵权必究
举报电话:(010)68510107



JJF 1059.2-2012